ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A.

Μονάδες 4

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X, αν $\overline{x} > 0$ και πώς, αν $\overline{x} < 0$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$ (μονάδες 2).

γ) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2).

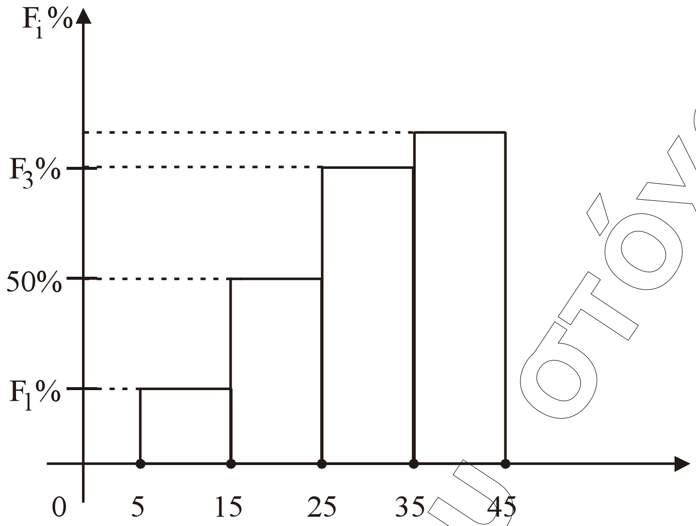
δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

ε) $\lim\limits_{x \to x_0} ημx = ημx_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$ (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	f_i%	N_i	F_i%
[5,)		$\alpha + 4$			
[,)		$3\alpha - 6$			
[,)		$2\alpha + 8$			
[, 45)		$\alpha - 2$			
Σύνολο					

Μονάδες 8

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9{,}17$)

Μονάδες 8

Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$

- Ισπανικά είναι $\dfrac{v+2}{v^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\dfrac{v+1}{v^2+1}$
- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $v = 3$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x},\ x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $M(x, f(x)),\ x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x,\ 0)$ και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKM\Lambda$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία $\varepsilon\colon y=\lambda x+\beta,\ \beta\neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i), $i=1,2,\ldots,10$ της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A\neq\varnothing$ και $A\cap B\neq\varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A))+f(P(A\cap B))\geq 2f(P(A\cup B))$$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 31 σχολ. βιβλίου.

Α2. Θεωρία, σελ. 148 σχολ. βιβλίου.

Α3. Θεωρία, σελ. 96 σχολ. βιβλίου.

Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων, από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων θα είναι δ = 25.

Β2. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% και είναι δ = 25 θα είναι

$$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha + 3\alpha - 2\alpha - \alpha = -4 + 6 + 8 - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8.$$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων θα είναι

χρόνος (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5-15)	10	12	20	12	20
[15-25)	20	18	30	30	50
[25-35)	30	24	40	54	90
[35-45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3.

Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} v_i x_i}{v} = \dfrac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$ λεπτά.

Επίσης $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} v_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{v} = \dfrac{v_1\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + v_2\left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + v_3\left(x_3 - \bar{x}\right)^2 + v_4\left(x_4 - \bar{x}\right)^2}{v} =$

$$= \frac{12(10-24)^2 + 18(20-24)^2 + 24(30-24)^2 + 6(40-24)^2}{60} =$$

$$= \frac{12\cdot 195 + 18\cdot 16 + 24\cdot 36 + 6\cdot 256}{60} = \frac{5040}{60} = \frac{504}{6} = 84.$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι $S = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \simeq 9{,}17$ λεπτά.

Β4.

Από 35 έως 45 έχουμε το 10% των παρατηρήσεων και έστω $x\%$ το ποσοστό των παρατηρήσεων από 37 έως 45. Τότε θα είναι:

$$\frac{45-35}{45-37}=\frac{10}{x}\Leftrightarrow\frac{10}{8}=\frac{10}{x}\Leftrightarrow 10x=80\Leftrightarrow x=8\%.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν Γ και Ι είναι τα ενδεχόμενα ένας μαθητής να μαθαίνει αντίστοιχα Γαλλικά, Ισπανικά, τότε είναι:

$$P(\Gamma\cup \mathrm{I})=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)}=1.$$

Άρα το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει τουλάχιστον μια από τις 2 γλώσσες είναι βέβαιο.

Γ2. Είναι $P(\Gamma)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(\mathrm{I})=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cup \mathrm{I})=1$.

Όμως $P(\Gamma\cup \mathrm{I})=P(\Gamma)+P(\mathrm{I})-P(\Gamma\cap \mathrm{I})$, άρα:

$$1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+\nu+2-\nu-1\Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow \nu=0 \quad ή \quad \nu=3.$$

Επειδή $\nu\geq 3$ προκύπτει $\nu=3$.

Γ3. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες είναι το: $(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)$.

Είναι $P((\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma))=P(\Gamma)+P(\mathrm{I})-2P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-2\cdot\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Γ4. $P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. Όμως $P(\Gamma\cap \mathrm{I})=\frac{\mathrm{N}(\Gamma\cap \mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)}$.

Έτσι $\frac{\mathrm{N}(\Gamma\cap \mathrm{I})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{32}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow \mathrm{N}(\Omega)=80$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left(\frac{1+\ln^2 x}{x}\right)' = \frac{x\left(2\frac{1}{x}\ln x\right) - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2\ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} =$$

$$= -\frac{\ln^2 x - 2\ln x + 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2}$$

Επειδή είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$, $f'(e) = 0$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΛΜΚ είναι: $E(x) = x \cdot f(x) = x\dfrac{1+\ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x.$

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$E'(x) = \left(1+\ln^2 x\right)' = 2\ln x\left(\ln x\right)' = \frac{2\ln x}{x}.$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	0		1		+∞
E΄(x)		−	0	+	
E(x)		↘	min	↗	

$E(1) = 1 \cdot \dfrac{1+\ln^2 1}{1} = 1$. Για την τιμή $x = 1$, έχουμε $f(1) = 1$, επομένως (ΟΛ) = (ΟΚ), οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Επειδή η ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$ είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$, θα είναι: $\lambda = f'(1) = -1$.

Έτσι έχουμε: $y = -x + \beta$, με $\beta \neq 10$.

Επειδή η μέση τιμή των παρατηρήσεων x_i είναι $\bar{x} = 10$ και $y_i = (-1)x_i + \beta$ προκύπτει ότι:

$$\bar{y} = -10 + \beta \text{ και } S_y = |-1| \cdot S_x = 2.$$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων y_i με $i = 1,2 \ldots, 10$ ομοιογενές θα πρέπει:
$\dfrac{S_y}{|\bar{y}|} \leq 0,1.$

$$\frac{S_y}{|\bar{y}|} \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{|-\bar{x}+\beta|} \le \frac{10}{100} \Leftrightarrow |-\bar{x}+\beta| \ge 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-10+\beta| \ge 20 \Leftrightarrow (-10+\beta \le -20 \quad \text{ή} \quad -10+\beta \ge 20) \Leftrightarrow \beta \le -10 \quad \text{ή} \quad \beta \ge 30.$$

Άρα: $\beta \in (-\infty,-10] \cup [30,+\infty)$.

Δ4.

(i) $A \subseteq A \cup B$ άρα $P(A) \le P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1)

(ii) $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:
$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$.