ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2013

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$. (μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι:

$$(f(x)\ g(x))' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$$

(μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_4\}, \text{ και } B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2}$
- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x = 1$, όπου

$$f(x) = \frac{x}{3}\ln x,\ x > 0$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1) = \dfrac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \dfrac{1}{3}$

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{3} \le P(A') \le \dfrac{3}{4}$, όπου Α′ το συμπληρωματικό του Α.

Μονάδες 7

Β3. Αν $P(A') = \dfrac{3}{4}$**,** τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A - B) \cup (B - A)]$ και $P(A' - B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του Β.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta = 75$
  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$.

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι $f_1 = 0{,}1$, $f_2 = 0{,}3$, $f_3 = 0{,}2$, και $f_4 = 0{,}4$.
Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\dfrac{200}{3}$

Μονάδες 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με $\kappa < \nu$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με:

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + \kappa$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E, με $E < 2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω x_1, x_2, ..., x_{50} οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y} = |31|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = |30|$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, ..., x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31.

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e), f'\left(\frac{1}{e}\right)$, όπου $f(x) = x\ln x + 2$.

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \left\{ t_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots, 30 : 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \ldots < t_{30} = 1 \right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

Α = { $t \in \Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(t, f(t))$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία },

Β = { $t \in \Omega$: $f(t) > f'(t) + 1$ },

όπου $f(t) = t \ln t + 2$.

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (μονάδες 3)
β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28
Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14
Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87
Α4. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

- $$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \frac{1}{4}.$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1, ισούται με $f'(1)$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x > 0 με

  $$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\ln x\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)'\ln x + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}.$$

  Για x = 1 έχουμε:

  $$f'(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Β2. Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$. Επειδή $\{\omega_3\} \subseteq A'$ είναι $P(\omega_3) \le P(A')$. Όμως $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

οπότε $\frac{1}{3} \le P(A')$. $P(A') \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \ge \frac{1}{4}$.

Πράγματι, $\{\omega_1\} \subseteq A$ άρα $P(\omega_1) \le P(A)$. Όμως $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, άρα $P(A) \ge \frac{1}{4}$.

B3.

$$P(A')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 1-P(A)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{4}.$$

Όμως $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)$ και επειδή $P(\omega_1)=\frac{1}{4}$

προκύπτει $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+P(\omega_4)\Leftrightarrow P(\omega_4)=0$.

Είναι $P(\Omega)=1$, άρα $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1$

και επειδή $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$, $P(\omega_4)=0$ προκύπτει

$$P(\omega_2)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{12}{12}-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}.$$

Τα Α − Β, Β − Α είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, άρα

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\quad (1)$$

Όμως $A=\{\omega_1,\omega_4\}$, άρα $P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}$.

$B=\{\omega_1,\omega_3\}$, άρα $P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$.

$A\cap B=\{\omega_1\}$, άρα $P(A\cap B)=P(\omega_1)=\frac{1}{4}$.

Από την (1) βρίσκουμε ότι:

$$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{7}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}.$$

β΄ τρόπος: $A-B=\{\omega_4\}$, $B-A=\{\omega_3\}$ άρα

$$P\left[(A\cup B)\cup(B-A)\right]=P\left(\{\omega_3\}\cup\{\omega_4\}\right)=$$
$$=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}.$$

$$P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=P(A')-P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A)-1+P(A\cup B)=$$
$$=P(A\cup B)-P(A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A)=$$
$$=P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

β΄ τρόπος: Είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ και $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$
οπότε $A'-B'=\{\omega_3\}$. Άρα $P(A'-B')=P(\omega_3)=1/3$).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν c το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε η τέταρτη κλάση θα είναι $[50 + 3c, 50 + 4c)$. Αφού η κεντρική τιμή της είναι 85, προκύπτει ότι

$$\frac{50+3c+50+4c}{2}=85 \Leftrightarrow 50+\frac{7c}{2}=85 \Leftrightarrow \frac{7c}{2}=35 \Leftrightarrow c=10.$$

Γ2. Αφού η διάμεσος είναι $\delta = 75 \Leftrightarrow f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5$.

Επίσης, $\bar{x}=74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74$. Επίσης ισχύουν $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$ καθώς και $f_4 = 2f_3$ άρα,

$$\left.\begin{array}{l} f_1+f_2+\dfrac{f_3}{2}=0,5 \\ 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74 \\ f_1+f_2+f_3+f_4=1 \\ f_4=2f_3 \end{array}\right\}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $f_1 = 0,1$ $f_2 = 0,3$ $f_3 = 0,2$ $f_4 = 0,4$.

Έτσι προκύτει ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	x_i	f_i
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο		1

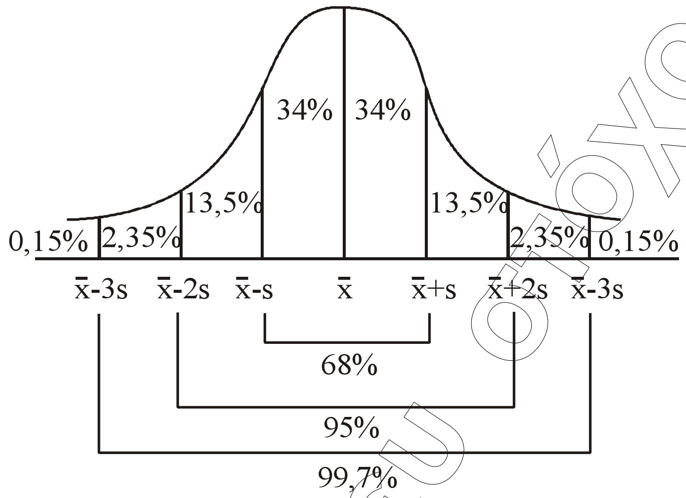
Γ3. Έχουμε $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i=74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i=74\nu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3}x_i\nu_i+x_4\nu_4=74\nu \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3}x_i\nu_i=74\nu-x_4\nu_4 \quad (1)$$

Επομένως η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\overline{x'}=\frac{\sum_{i=1}^{3}x_i\nu_i}{\nu_1+\nu_2+\nu_3}\overset{(1)}{=}\frac{74\nu-x_4\nu_4}{\nu-\nu_4}\overset{:\nu}{\underset{:\nu}{=}}\frac{74-x_4f_4}{1-f_4}=\frac{74-85\cdot 0,4}{1-0,4}=\frac{40}{0,6}=\frac{200}{3}$$

Γ4. Αφού η κατανομή είναι κανονική



και το 2,5 % των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι $\bar{x}+2s=74$. Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι θα είναι $\bar{x}-s=68$, όπου $\bar{x}, s$ η μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, των κ παρατηρήσεων.

Άρα θα είναι $\bar{x}+2s=74$, $\bar{x}-s=68$.

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\delta=2$ και $\bar{x}=70$.

Ο συντελεστής μεταβολής των κ παρατηρήσεων είναι $\mathrm{CV}=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{70}<\frac{1}{10}$.

Άρα το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\ln x+1$, $x>0$

Η εφαπτόμενη της f στο στο σημείο (1, f(1)) είναι:

(ε): $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda=f'(1)=1$.

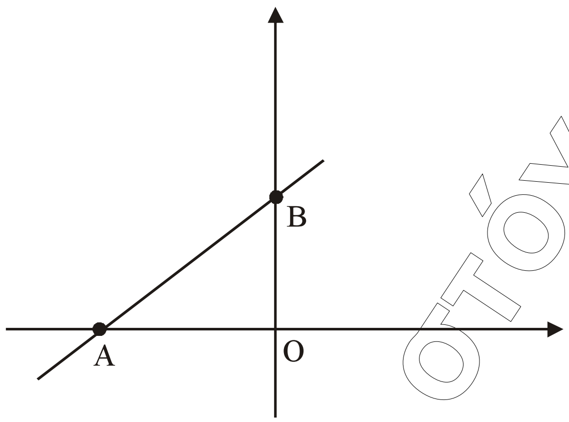
Επειδή η (ε) διέρχεται από το (1, f(1)) αλλά

$f(1)=1+\beta \Leftrightarrow \beta=f(1)-1=1\ln 1+\kappa-1=\kappa=1$

η (ε) γίνεται $y=x+\kappa-1$.

Τα σημεία Α, Β στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι Α(1-κ, 0) και Β(0, κ-1) αντίστοιχα.

Το τρίγωνο ΟΑΒ έτσι έχει εμβαδόν: $\mathrm{E}=\frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})$ άρα



$$E = \frac{|1-\kappa| \cdot |\kappa - 1|}{2} = \frac{(\kappa-1)^2}{2}$$

Δίνεται Ε < 2, άρα $\frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow |\kappa-1|^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$

Όμως κ ακέραιος με κ > 1, άρα κ = 2.

Δ2.

α) Επειδή κ= 2 η (ε) γίνεται $y = x + 1$

Επίσης από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι:

$\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$.

β) Είναι $31 = \dfrac{(x_1+3) + \ldots + (x_{20}+3) + x_{21} + \ldots + x_{35} + (x_{36}-\lambda) + \ldots + (x_{50}-\lambda)}{50} \Leftrightarrow$

$$\sum_{\iota=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda = 31 \cdot 50 \Leftrightarrow 30 \cdot 50 + 60 - 15\lambda = 30 \cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 - 15\lambda = 50 \Leftrightarrow 10 = 15\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Είναι f΄(x) = ln x + 1, x > 0.

Έτσι έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών

x	0		1/e		+∞
f΄(x)		−	0	+	
f(x)		↘		↗	

Προκύπτει $\min f : f\left(1/e\right) = 2 - \frac{1}{e} = \frac{2e-1}{e} > 0$

Στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$.

Επειδή $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ προκύπτει: $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$.

Έτσι $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2$.

Από τη δοσμένη σχέση $a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$ προκύπτει
$\ln(a^a \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma) = \ln e^7 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7$
$\Leftrightarrow f(\alpha) - 2 + f(\beta) - 2 + f(\gamma) - 2 = 7 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 13$.

Έτσι: $\overline{x} = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} =$
$= \dfrac{13 + e + 2}{5} = \dfrac{15 + e}{5}$.

Δ4. α) Για το ενδεχόμενο Α έχουμε:

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow \ln t > \ln\frac{1}{e} \overset{(\ln x \uparrow)}{\Leftrightarrow} t > \frac{1}{e}$.

Άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, t_{13} \ldots, t_{30}\}$.

$N(A) = 20$ άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$.

β) Για το ενδεχόμενο Β έχουμε:
$f(t) > f(t') + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > 1 + \ln t + 1 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0$.
Άρα $\{\, t - 1 < 0$ και $\ln t < 0 \,\}$ ή $\{\, t - 1 > 0$ και $\ln t > 0 \,\}$
Η δεύτερη περίπτωση δεν μπορείν να ισχύει διότι $t \in \Omega$, άρα t< 1.
Άρα 0< t < 1, άρα $\mathrm{B} = \{t_1, t_2, t_{13} \ldots, t_{29}\}$.

Έτσι $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{ t_{11}, t_{12}, t_{13} \ldots, t_{29} \}$ και άρα $P(A \cap B) = \dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \dfrac{19}{30}$.