ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
2015
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),\ \ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Αν x_1, x_2,..., x_ν είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και w_1, w_2,..., w_ν είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής X.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο $(\alpha,\ x_0)$ και $f'(x_0)<0$ στο $(x_0,\ \beta)$, τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων A και B ισχύει $CV_B > CV_A > C_V$, τότε λέμε ότι το δείγμα B εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα A.

ε) Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε η έκφραση «πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B» δηλώνει ότι $A\subseteq B$.

Μονάδες 10

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΥ ΚΕΡΚΥΡΑ στόχος

ΘΕΜΑ Β

Έστω A, B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, $A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x - 1) \cdot (8x^2 - 6x + 1) = 0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' - B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου
Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B».

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B».

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις , όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου f_i %, i = 1, 2, 3, 4, 5 είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι:

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108^o.
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ευ στόχος
ΚΕΡΚΥΡΑ

Κλάσεις	f_i %
[8, 10)	
[10, 12)	
[12, 14)	
[14, 16)	
[16, 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι f_1 % = 10, f_2 % =10, f_3 % =30, f_4 % =20, f_5 % =30. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.
Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \simeq 2,57$.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα και ν_1, ν_2, ν_3 και ν_4 οι συχνότητες της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 1780$, βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

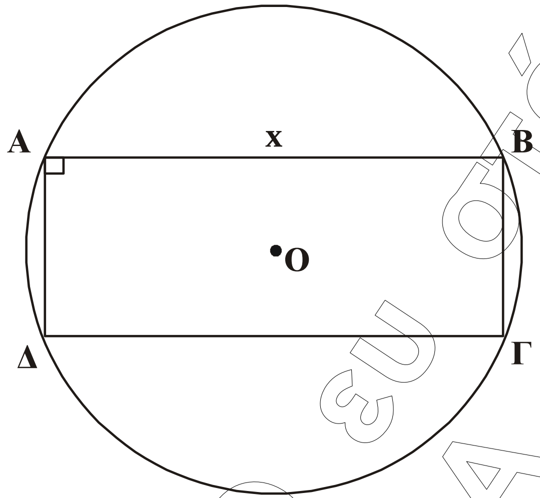
Γ4. Έστω a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα ν παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{a}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση.
Εάν $\beta i = \frac{a_i - \bar{a}}{S_a}$, για i = 1, 2, 3, 4, 5, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος β_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΥ ΣΤΟΧΟΣ ΚΕΡΚΥΡΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 5$ και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά ΑΒ = x, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x, δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν $P(A\text{–}B) > 0$, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100} - P^2(A)}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100} - P^2(A-B)}\right)$$

Μονάδες 8

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΚΕΡΚΥΡΑ ευ στόχος

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Θεωρία, σχολ. βιβλίο σελ. 31.

Α2. Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνον όταν το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Α3. Ορισμός, σχολ. βιβλίο σελ. 86-87.

Α4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$ είναι

$\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right\}$, με $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$.

Επειδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ έπεται $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\mathrm{P}(\mathrm{A})\le\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ και επειδή οι πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, $\mathrm{P}(\mathrm{A})$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ είναι διαφορετικές ανά δύο μεταξύ τους, προκύπτει ότι

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})<\mathrm{P}(\mathrm{A})<\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$$

Έτσι προκύπτει $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\dfrac{1}{2}$.

Β2. $$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{5}{12}.$$

Για το ενδεχόμενο Α΄–Β΄ είναι:

$$\mathrm{A}'-\mathrm{B}'=\mathrm{A}'\cap(\mathrm{B}')'=\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}=\mathrm{B}-\mathrm{A}.$$

Άρα $\mathrm{P}(\mathrm{A}'-\mathrm{B}')=\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}-\dfrac{3}{12}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

Το ενδεχόμενο Δ ισούται με $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'$, οπότε

$$\mathrm{P}(\Delta)=\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'\right]=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ευ στόχος ΚΕΡΚΥΡΑ

Β3. Το ενδεχόμενο Ε ισούται με $(A-B)\cup(B-A)$ οπότε

$$P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ .$$

Β4. Η εξίσωση $9x^2-3x-2=0$, έχει ρίζες $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$. Άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Αν τα ενδεχόμενα Β, Γ ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν

$P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=P(\mathrm{B})+P(\Gamma)\Leftrightarrow P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=\frac{2}{3}+\frac{5}{12}\Leftrightarrow P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=\frac{13}{12}>1$, άτοπο.

Άρα τα Β, Γ δεν μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τα δεδομένα προκύπτει $f_1\%=10$ και $f_5\%=30$. Επίσης είναι $f_3=\frac{108}{360}=0,3$

Άρα $f_3\%=30$

Τα κέντρα των κλάσεων είναι $x_1=9,\ \ x_2=11,\ \ x_3=13,\ \ x_4=15,\ \ x_5=17$.

Από τον τύπο $\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot f_i$ προκύπτει

$14=9\cdot 0,1+11\cdot f_2+13\cdot 0,3+15\cdot f_4+17\cdot 0,3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14=11\cdot f_2+15\cdot f_4+9.9\Leftrightarrow 11\cdot f_2+15\cdot f_4=4,1\ \ (1)$

Επίσης είναι $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+1\Leftrightarrow 0,1+f_2+0,3+f_4+0,3=1\Leftrightarrow f_2+f_4=0.3\ \ (2)$.

Από το σύστημα των (1), (2) : $\begin{pmatrix}11f_2+15f_4=4,1\\ f_2+f_4=0,3\end{pmatrix}$ προκύπτει $f_2=0,1$ και $f_4=0,2$.

Άρα $f_2\%=10$ και $f_4\%=20$.

Κλάσεις	f_1 %
[8, 10)	10
[10, 12)	10
[12, 14)	30
[14, 16)	20
[16, 18)	30

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΥ ΣΤΟΧΟΣ ΚΕΡΚΥΡΑ

Γ2. Από τον τύπο $S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{S}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \nu_i$

προκύπτει $S^2 = \sum_{i=1}^{5}\frac{\nu_i}{\nu}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \Leftrightarrow S^2 = \sum_{i=1}^{5} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$.

Έτσι $S^2 = f_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + f_2\left(x_2 - \overline{x}\right)^2 + f_3\left(x_3 - \overline{x}\right)^2 + f_4\left(x_4 - \overline{x}\right)^2 + f_5\left(x_5 - \overline{x}\right)^2 =$

$= 0{,}1(9-14)^2 + 0{,}1(11-14)^2 + 0{,}3(13-14)^2 + 0{,}2(15-14)^2 + 0{,}3(17-14)^2 =$

$= 0{,}1\cdot 25 + 0{,}1\cdot 9 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}9\cdot 9 = 2{,}5 + 0{,}9 + 0{,}3 + 0{,}2 + 2{,}7 = 6{,}6.$

$S^2 = 6{,}6$ άρα $S = \sqrt{6{,}6} \simeq 2{,}57.$

Ισχύει ότι $CV = \frac{S}{|\overline{x}|} = \frac{2{,}57}{14} \approx 0{,}18 > 0{,}1.$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει ότι $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\nu_i \cdot x_i}{\nu} \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4}\nu_i \cdot x_i + \nu_5 \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + f_5 \cdot \nu \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14\cdot\nu = 1780 + 0{,}3\cdot\nu\cdot 17 \Leftrightarrow 14\cdot\nu - 5{,}1\cdot\nu = 1780 \Leftrightarrow 8{,}9\cdot\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nu = 200$

Γ4. Από την εφαρμογή της σελ 99 του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι αν δυο μεταβλητές x, y συνδέονται με τη σχέση $Y = \alpha X + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$\overline{y} = a\overline{x} + \beta$ και $S_y = |a| S_x$.

Από το δεδομένο $\beta_i = \frac{a_i - \overline{a}}{S_a} \Leftrightarrow \beta_i = \frac{1}{S_a}a_i - \frac{\overline{a}}{S_a}$, προκύπτει ότι οι μεταβλητές α, β

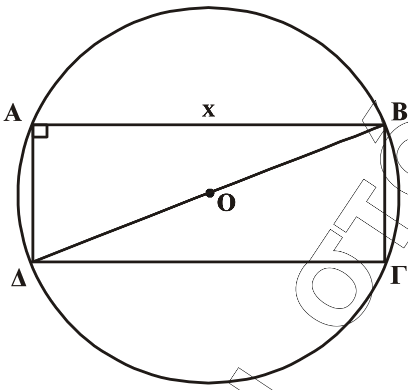
συνδέονται με τη σχέση $\beta = \frac{1}{S_a}a - \frac{\overline{a}}{S_a}$.

Άρα $\overline{\beta} = \frac{1}{S_a}\overline{a} - \frac{\overline{a}}{S_a} = 0$ και $S_\beta = \left|\frac{1}{S_a}\right| S_a = \frac{1}{S_a}S_a = 1.$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ευ ΚΕΡΚΥΡΑ στόχος

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Το τμήμα ΑΒ = x , είναι χορδή του κύκλου, άρα $0 < x < 2 \cdot \rho \Leftrightarrow 0 < x < 10$.

Η γωνία ΔΑΒ είναι ορθή, άρα η χορδή ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

Έτσι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΑΒ = x, ΒΔ = 10 και άρα

$A\Delta = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = f(x)$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,10) με

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50}$ ή $x = -\sqrt{50}.$

Επειδή $x \in (0,10)$ προκύπτει $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολής.

x	0	$5\sqrt{2}$	10
f ΄	+	0	-
f	↗	τ.μέγιστο	↘

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ευ στόχος ΚΕΡΚΥΡΑ

Συμπεραίνουμε ότι για την τιμή $x=5\sqrt{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο. Για την τιμή αυτή είναι $\text{ΑΔ}=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$, δηλ. ΑΔ = ΑΒ, οπότε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{99}=1\cdot\sqrt{100-1^2}=f(1)$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\dfrac{1}{98}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}=$

$=\dfrac{1}{98}\cdot f'(1)=\dfrac{1}{98}\cdot\dfrac{100-2\cdot 1^2}{\sqrt{100-1^2}}=\dfrac{1}{98}\cdot\dfrac{98}{\sqrt{99}}=\dfrac{1}{\sqrt{99}}=\dfrac{\sqrt{99}}{99}$.

Δ4. Είναι $A-B\subseteq A$, άρα $P(A-B)\le P(A)$ και επειδή $P(A-B)>0$, $P(A)\le 1$ είναι: $0<P(A-B)\le P(A)\le 1<5\sqrt{2}$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,5\sqrt{2}\right)$ άρα

$f\left[P(A-B)\right]\le f\left[P(A)\right]\Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$ (1).

Είναι $0<P(A-B)\le 1$, άρα

$P^2(A-B)\le 1\Leftrightarrow$

$-P^2(A-B)\ge -1\Leftrightarrow 100-P^2(A-B)\ge 99\Leftrightarrow\sqrt{100-P^2(A-B)}\ge\sqrt{99}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{99}}$

Επειδή $0<P(A)\le 1$ και

$0<\dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{99}}$, προκύπτει $0<\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{99}}<1$.

Τελικά $0<\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<1$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,5\sqrt{2}\right)$ άρα

$f\left(\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΧΟΣ ΚΕΡΚΥΡΑ