

Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

A.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:
 $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 8,5

A.2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ($=, \leq, \geq$) έτσι ώστε να είναι αληθείς:

α. $P(A') \dots 1-P(A)$

Μονάδες 2

β. αν $A \subseteq B$ τότε $P(B) \dots P(A)$.

Μονάδες 2

B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

α. Αν $A' \subseteq B$ τότε $P(A) + P(B) < 1$.

β. Αν $P(A) = P(A')$ τότε $2P(A) = P(\Omega)$.

Μονάδες 4

B.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $A \subseteq B$, $P(A) = 1/4$ και $P(B) = 5/12$ τότε η $P(A \cup B)$ είναι ίση με:

α. 1/4 **β.** 5/12 **γ.** 2/3 **δ.** 1/6.

Μονάδες 2,5

B.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι:

$$P(A) = 1/3, P(B) = 1/4 \text{ και } P(A \cap B) = 1/5.$$

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A-B)$	1. 1/20
β. $P((B-A)')$	2. 2/15
γ. $P((A \cap B)')$	3. 4/5
	4. 1/12
	5. 19/20

Μονάδες 6

Απάντηση:

A.1. Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B) \cup (A \cap B) = A$ Έχουμε:

$$P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

Άρα:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

- A.2.** α. $P(A') = 1 - P(A)$
 β. $A \subseteq B$ τότε: $P(B) \geq P(A)$

- B.1.** α.
 Αφού

$$A' \subseteq B \Rightarrow P(A') \leq P(B) \Rightarrow 1 - P(A) \leq P(B) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(B) + P(A) \geq 1$$

Άρα:

α. Λάθος

- β.
 Επειδή:

$$P(A) = P(A') \Rightarrow \\ P(A) = 1 - P(A) \Rightarrow \\ 2P(A) = 1 \Rightarrow \\ 2P(A) = P(\Omega)$$

Άρα:

β. Σωστό

- B.2.** Αφού:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

οπότε:

$$P(A \cap B) = P(A) = 1/4$$

Επομένως:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/4 + 5/12 - 1/4 = 5/12$$

Άρα:

β. Σωστό

- B.3.**

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 1/3 - 1/5 = 2/15$
- $P((B - A)') = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(A \cap B)] = \\ = 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 1/4 + 1/5 = 3/4 + 1/5 = 19/20$
- $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - 1/5 = 4/5$

Άρα:

$$\alpha. \leftrightarrow 2$$

$$\beta. \leftrightarrow 5$$

$$\gamma. \leftrightarrow 3$$

Ζήτημα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x + \eta \mu x$.

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq f''(x) = 0$.

Μονάδες 8

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f' \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2.$$

Μονάδες 9

Απάντηση:

A. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές στο \mathbb{R} με:

$$f'(x) = (\sin x + \eta \mu x)' = -\eta \mu x + \cos x.$$

$$f''(x) = (-\eta \mu x + \cos x)' = -\sin x - \eta \mu x$$

Άρα:

$$f(x) + f''(x) = \sin x + \eta\mu x - \sin x - \eta\mu x = 0.$$

Β. Έστω $\psi = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.

Τότε θα είναι:

$$f'(0) = \alpha \text{ και} \\ 1 = \beta.$$

Όμως

$$f'(x) = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \text{ οπότε:}$$

$$f'(0) = -\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = x + 1$$

Γ. Είναι:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = -1.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1.$$

Επομένως:

$$\lambda \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda - 2 = 2$$

Άρα:

$$\lambda = -4$$

Ζήτημα 3ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

Βάρος σε κιλά [-)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

A. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

Μονάδες 8

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

Μονάδες 9

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

Μονάδες 4

Απάντηση:

A. Επειδή η σχετική συχνότητα f_3 είναι διπλάσια της $f_1 = F_1 = 0,2$

Έχουμε:

$$f_3 = 2 f_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4$$

Ακόμα:

$$F_2 = f_1 + f_2 \Leftrightarrow 0,5 = 0,2 + f_2 \Leftrightarrow f_2 = 0,3$$

Από την σχέση $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$

Έχουμε:

$$0,2 + 0,3 + 0,4 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_4 = 1 - 0,9 = 0,1$$

Άρα:

$$f_1 = 0,2, \quad f_2 = 0,3, \quad f_3 = 0,4 \quad \text{και} \quad f_4 = 0,1$$

Άρα:

$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0,9 \quad \text{και} \quad F_4 = 1$$

B. Είναι:

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$$

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 80$, οι αντίστοιχες συχνότητες v_i με $i = 1, 2, 3, 4$ είναι:

$$v_1 = 80 \cdot 0,2 = 16$$

$$v_2 = 80 \cdot 0,3 = 24$$

$$v_3 = 80 \cdot 0,4 = 32$$

$$v_4 = 80 \cdot 0,1 = 8$$

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$[-)$	x_i	v_i	f_i	F_i	$v_i x_i$
45 - 55	50	16	0,2	0,2	$50 \cdot 16 = 800$
55 - 65	60	24	0,3	0,5	$60 \cdot 24 = 1440$
65 - 75	70	32	0,4	0,9	$70 \cdot 32 = 2240$
75 - 85	80	8	0,1	1	$80 \cdot 8 = 640$
		$v = 80$	1		

Άρα:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 v_i x_i = \frac{1}{80} \cdot (800 + 1440 + 2240 + 640) = \\ &= \frac{1}{80} \cdot 5120 = 64 \end{aligned}$$

- Γ. α. Αν A είναι το ενδεχόμενο "βάρος μικρότερο από 65 κιλά" τότε η πιθανότητα P(A) είναι:

$$P(A) = \frac{16+24}{80} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

- β. Αν B είναι το ενδεχόμενο "βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών" τότε η πιθανότητα P(B) είναι:

$$P(B) = \frac{24+32}{80} = \frac{56}{80} = \frac{7}{10}$$

Ζήτημα 4ο

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

- A. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους. Μονάδες 6
- B. Να εξετάσετε, αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μονάδες 6
- Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά. Μονάδες 6
- Δ. Μια μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV). Μονάδες 7

Απάντηση:

- A. Αφού το 50% των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, προκύπτει ότι:

$$\bar{x} = 12.$$

Επειδή το 16% χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά, προκύπτει ότι από 10 έως 12 λεπτά χρειάζεται το $(50 - 16)\% = 34\% = (68/2)\%$ των μαθητών.

Άρα:

$$\bar{x} - s_x = 10 \Leftrightarrow 12 - s_x = 10 \Leftrightarrow s_x = 2$$

- B. Είναι:

$$CV_1 = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ περίπου } 16,6\%.$$

Επειδή $16,6\% > 10\%$, προκύπτει ότι το δείγμα είναι ανομοιογενές.

- Γ. Έχουμε:

$$\bar{x} = 12$$

$$\bar{x} + s_x = 14$$

$$\bar{x} + 2 \cdot s_x = 16$$

Το ποσοστό των μαθητών που κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά θα είναι:

$$\left(\frac{95-68}{2}\right)\% = 13,5\%$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$40000 \cdot \frac{13,5}{100} = 40 \cdot 13,5 = 540$$

Δ. Αφού η καθυστέρηση για κάθε μαθητή είναι 5 λεπτά έχουμε σύμφωνα με την εφαρμογή 3 σελίδα 99 του σχολ.βιβλίου ότι:

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\bar{\psi} = \bar{x} + 5 = 12 + 5 = 17$$

Η νέα τυπική απόκλιση είναι:

$$S_{\psi} = S_x = 2$$

οπότε:

$$CV_2 = \frac{s_{\psi}}{\bar{\psi}} = \frac{2}{17} \text{ περίπου } 11,7\%$$

Άρα η μεταβολή είναι περίπου 5%.