ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου k,ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i, που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, $i = 1,2,\ldots,k$;

Μονάδες 3

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1,2,\ldots,k$;

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι:

i) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1,2,\ldots,k$

ii) $f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$.

Μονάδες 4

Β.1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Μονάδες 8

Β.2. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω.

Μονάδες 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ ii) $P(\varnothing)$.

Μονάδες 2

<u>Απάντηση</u>:

α) Ονομάζουμε <u>απόλυτη συχνότητα</u>, το φυσικό αριθμό ν_i, ο οποίος δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων ν.

β) Ονομάζουμε <u>σχετική συχνότητα</u> τον αριθμό fi που προκύπτει αν διαιρέσουμε την απόλυτη συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i με το μέγεθος ν του δείγματος.

Ισχύει δηλαδή ότι: $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ με i = 1, 2, …, κ.

γ)

i) Επειδή είναι

$$0 \leq \nu_i \leq \nu \text{ για κάθε } i = 1, 2, \ldots, \kappa$$

προκύπτει ότι

$$0 \leq \frac{\nu_i}{\nu} \leq 1.$$

Άρα $0 \leq fi \leq 1$ για κάθε i = 1, 2, …, κ.

ii) Έχουμε

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

Β. 1.

Κανόνες λογισμού των Πιθανοτήτων Θεώρημα 1. Σελ. 150 σχολ. βιβλίου.

Β.2 α.

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ τον αριθμό

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Β.2.β.

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) $P(\emptyset) = 0$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to3} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f.

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία y = 2x + 5.

Μονάδες 10

<u>Απάντηση</u>:

(α) Πρέπει x+1 $\neq$ 0, οπότε x $\neq$ -1
Άρα $A_f = \Re - \{-1\}$

(β) $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} \frac{2x}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

(γ) $f'(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)' = \frac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} =$

$$\frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

(δ) Αναζητούμε $x_o \in \Re - \{-1\}$ ώστε $f'(x_o) = 2$

Όμως: $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

οπότε:

$$\frac{2}{(x_o+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2(x_o+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$2(x_o+1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x_o+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_o+1-1)(x_o+1+1) = 0 \Leftrightarrow x_o(x_o+2) = 0 \Leftrightarrow (x_o = 0 \text{ ή } x_o = -2)$$

Έτσι τα σημεία επαφής είναι τα
A(0,f(0)) = (0,0) και
B(-2,f(-2)) = (-2,4).

Οι αντίστοιχες εξισώσεις εφαπτομένων είναι :

- Στο σημείο Α(0,0)

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 0 = 2x$

άρα

$y = 2x$

- Στο σημείο Β(-2,4)

$y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$

$y - 4 = 2(x+2)$

$y - 4 = 2x + 4$

άρα

$y = 2x + 8$

<u>Σημείωση:</u>

Ως απάντηση στην εύρεση των εξισώσεων των εφαπτομένων (ερώτηση δ) θα μπορούσε να δωθεί και η ακόλουθη:

- Έστω y = αx+β η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της *f* στο Α(0,0).
  Τότε: α = $f'(0)$ = 2
  και 0 = 2·0 - β άρα β = 0
  Οπότε y = 2x
- Έστω y = α'x+β' η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της *f* στο Β(2,4).
  Τότε: α' = $f'(-2)$ = 2
  και 4 = 2·(-2)+β άρα β = 8
  Οπότε y = 2x+8

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

<u>Απάντηση</u>:

x_i	ν_i	$\nu_i x_i$
8	1	8
9	1	9
10	1	10
13	2	26
14	2	28
15	1	15
16	1	16
18	1	18
	10	130

α)

1. Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} \nu_i\, x_i}{10} = \dfrac{130}{10} = 13$

2. Για τη διάμεσο θέτοντας τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά έχουμε:

8 9 10 13 13 14 14 15 16 18

Είναι: $\delta = \dfrac{t_5 + t_6}{2} = \dfrac{13+14}{2} = 13{,}5$

3. Έχουμε δύο επικρατούσες τιμές = 13, 14.

β) Το εύρος R = 18 - 8 = 10.

Η διακύμανση s^2 είναι:

$$s^2 = \frac{1}{10}\left[(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + 2(13-13)^2 + 2(14-13)^2 + (15-13)^2 + (16-13)^2 + (18-13)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[25+16+9+2+4+9+25\right] = \frac{90}{10} = 9$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = 3$

και $CV_1 = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{3}{13}$

Περίπου 23%.

γ). Έστω y_i, i = 1, 2, …, 10 οι τιμές που προκύπτουν μετά την έκπτωση κατά 10% ή ισοδύναμα με πολλαπλασιασμό κατά 0,9. Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{y} = 0{,}9\,\bar{x}$, ενώ η νέα τυπική απόκλιση είναι $s_y = 0{,}9 \bullet s_x$

Έτσι ο νέος συντελεστής μεταβολής που προκύπτει είναι

$$CV_2 = \frac{0{,}9 \cdot s_x}{0{,}9 \cdot \bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV_1$$

Επομένως δεν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3 \,, \quad x \in R.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

Μονάδες 7

Απάντηση:

α) Από την υπόθεση έχουμε: $P(A)+P(B) \neq 2P(A \cap B)$

δηλ. $P(A)+P(B) - P(A \cap B) \neq P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow \quad P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$

β) Είναι: $f'(x) = 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 \quad x \in \Re$

Ακόμη: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x - P(A \cup B) = x - P(A \cap B) \\ \quad\quad ή \\ x - P(A \cup B) = -x + P(A \cap B) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A \cap B) \quad \text{αδύνατο} \\ \quad\quad ή \\ 2x = P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Επίσης: $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 > 0$

$\Leftrightarrow \big(x - P(A \cup B) - x + P(A \cap B)\big)\big(x - P(A \cup B) + x - P(A \cap B)\big) > 0$

$\Leftrightarrow \big(P(A \cap B) - P(A \cup B)\big)\big[2x - \big(P(A \cup B) + P(A \cap B)\big)\big] > 0$

$\Leftrightarrow \big(P(A \cap B) - P(A \cup B)\big)\big[2x - \big(P(A) + P(B)\big)\big] > 0 \quad (1)$

Όμως: $A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

και επειδή: $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$

είναι: $P(A \cap B) < P(A \cup B)$

Έτσι: $P(A \cap B) - P(A \cup B) < 0$

Οπότε: $(1) \Leftrightarrow 2x < P(A)+P(B)$

$$\Leftrightarrow x < \frac{P(A)+P(B)}{2}$$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι: $f'(x)<0 \Leftrightarrow x > \frac{P(A)+P(B)}{2}$

Άρα η f παρουσιάζει max για $x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$

γ) Αφού $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B)=0$ (1)

και $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$ (2)

Έτσι: $f(P(A)) = [P(A) - P(A \cup B)]^3 - [P(A) - P(A \cap B)]^3$

$$\overset{(1),(2)}{=} [P(A) - P(A) - P(B)]^3 - [P(A)]^3$$

$$= -P^3(B) - P^3(A)$$

$$f(P(B)) = [P(B) - P(A \cup B)]^3 - [P(B) - P(A \cap B)]^3$$

$$\overset{(1),(2)}{=} [P(B) - P(A) - P(B)]^3 - P^3(B)$$

$$= -P^3(A) - P^3(B)$$

Άρα: $f(P(A)) = f(P(B))$.