

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2003**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x$  είναι  $f'(x) = 1$ .  
Μονάδες 8

**B.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;  
Μονάδες 6

**Γ.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου ( $\delta$ ) ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων.  
Μονάδες 6

**Δ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

**β.** Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

**γ.** Ισχύει  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

όπου  $f, g$  παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

**δ.** Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B = \emptyset$ .

**ε.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

Μονάδες 5

**Απάντηση:**

**A.** Θεωρία: Παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης  $f(x)=x$ , σελ. 28 σχολικού βιβλίου.

**B.** Ορισμός: σελ. 13 σχολικού βιβλίου.

**Γ.** Ορισμός: σελ. 87 σχολικού βιβλίου.

**Δ.** α-Λ

β-Λ

γ-Σ

δ-Σ

ε-Λ.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

**α.** γυναίκα ή φιλόλογος  
Μονάδες 5

**β.** γυναίκα και όχι φιλόλογος  
Μονάδες 5

**γ.** άνδρας και φιλόλογος  
Μονάδες 7

**δ.** άνδρας ή φιλόλογος.  
Μονάδες 8

### Απάντηση:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Γ: ο καθηγητής είναι γυναίκα

Φ: ο καθηγητής είναι φιλόλογος

- Επειδή το 55% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες, έχουμε ότι:  
 $P(\Gamma)=0,55$ .
- Επειδή το 40% των καθηγητών του λυκείου είναι φιλόλογοι, έχουμε ότι:  
 $P(\Phi)=0,40$ .
- Επειδή το 30% των καθηγητών του λυκείου είναι γυναίκες φιλόλογοι, έχουμε ότι:  
 $P(\Phi \cap \Gamma)=P(\Gamma \cap \Phi)=0,30$ .

Επομένως:

**α.**  $P(\Gamma \cup \Phi)=P(\Gamma)+P(\Phi)-P(\Gamma \cap \Phi)=0,55+0,40-0,30=0,65$ .

**β.**  $P(\Gamma \cap \Phi')=P(\Gamma)-P(\Gamma \cap \Phi)=0,55-0,30=0,25$ .

**γ.** Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας και φιλόλογος είναι το  $\Gamma' \cap \Phi$ , άρα:

$$P(\Gamma' \cap \Phi)=P(\Phi)-P(\Gamma \cap \Phi)=0,40-0,30=0,10.$$

**δ.** Το ενδεχόμενο ο καθηγητής να είναι άνδρας ή φιλόλογος είναι το  $\Gamma' \cup \Phi$ , άρα:

$$\begin{aligned} P(\Gamma' \cup \Phi) &= P(\Gamma') + P(\Phi) - P(\Gamma' \cap \Phi) = \\ &= 1 - P(\Gamma) + P(\Phi) - P(\Phi) + P(\Gamma \cap \Phi) = \\ &= 1 - P(\Gamma) + P(\Gamma \cap \Phi) = 1 - 0,55 + 0,30 = 0,75. \end{aligned}$$

### **ΘΕΜΑ 3°**

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Δίνεται η συνάρτηση

**A.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.  
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

**α.**  $\mathbb{R}$

**β.**  $(-1,1)$

**γ.**  $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

**δ.**  $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

**B.** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

**Γ.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$

Μονάδες 6

**Δ.** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$  με τον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 7

### Απάντηση:

**A.** Πρέπει  $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \{x-1 \neq 0 \text{ και } x+1 \neq 0\} \Leftrightarrow \{x \neq 1 \text{ και } x \neq -1\}$   
Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $\mathbb{R} - \{-1,1\}$  και η σωστή απάντηση είναι η  $\gamma$ .

**Β.** Η συνάρτηση  $f$  ως ρητή είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}-\{-1,1\}$  με

$$f'(x) = \left( \frac{x}{x^2-1} \right)' = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} =$$
$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}-\{-1,1\}.$$

**Γ.** Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[ (x+1) \cdot \frac{x}{x^2-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

**Δ.** Αν  $\omega$  είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$  με τον άξονα  $x'x$ , τότε θα έχουμε  
 $\epsilon\phi\omega = f'(0)$

Όμως  $f'(0) = -\frac{0^2+1}{(0^2-1)^2} = -1$  και επειδή  $0 \leq \omega < 180^\circ$ , προκύπτει  $\omega = 135^\circ$ .

#### ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

| Ομάδα Α | Ομάδα Β |
|---------|---------|
| 1       | 7       |
| 8       | 14      |
| 9       | 6       |
| 5       | 4       |
| 3       | 12      |
| 4       | 5       |

**α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.  
Μονάδες 6

**β.** Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.  
Μονάδες 5

**γ.** Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 Ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;  
Μονάδες 8

**δ.** Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.  
Μονάδες 6

### Απάντηση:

α.

- Η μέση τιμή είναι:

$$\text{Ομάδα Α: } \bar{X}_A = \frac{1+8+9+5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5.$$

$$\text{Ομάδα Β: } \bar{X}_B = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{48}{6} = 8.$$

- Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$\text{Ομάδα Α: } 1, 3, 4, 5, 8, 9. \text{ Επομένως η διάμεσος είναι: } \delta_A = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

$$\text{Ομάδα Β: } 4, 5, 6, 7, 12, 14. \text{ Επομένως η διάμεσος είναι: } \delta_B = \frac{6+7}{2} = 6,5$$

β. Προκειμένου να συγκρίνουμε τις ομάδες ως προς την ομοιογένεια θα πρέπει να βρούμε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$ . Έχουμε:

$$S_A^2 = \frac{1}{6} \cdot [(1-5)^2 + (8-5)^2 + (9-5)^2 + (5-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [(-4)^2 + 3^2 + 4^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} (16 + 9 + 16 + 4 + 1) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 46 = \frac{46}{6} = \frac{23}{3}.$$

οπότε:

$$S_A = \sqrt{\frac{23}{3}}$$

$$S_B^2 = \frac{1}{6} [(7-8)^2 + (14-8)^2 + (6-8)^2 + (4-8)^2 + (12-8)^2 + (5-8)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [(-1)^2 + 6^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 4^2 + (-3)^2] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot [1 + 36 + 4 + 16 + 16 + 9] =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 82 = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}.$$

$$\text{οπότε } S_B = \sqrt{\frac{41}{3}}.$$

Επομένως,

$$CV_A = CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} = \sqrt{\frac{23}{75}} \cong \sqrt{0,30}.$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} = \sqrt{\frac{41}{192}} \cong \sqrt{0,21}.$$

Άρα  $CV_A > CV_B$  που σημαίνει ότι είναι περισσότερο ομοιογενής η Ομάδα Β.

**Υ.**

- Αν  $y_i$  με  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Α μετά την αύξηση καθemιάς κατά 20%, τότε έχουμε

$$y_i = x_i + \frac{20x_i}{100} = x_i \left( 1 + \frac{20}{100} \right) = 1,2x_i .$$

- Αν  $\omega_i$  με  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  είναι οι παρατηρήσεις της ομάδας Β μετά την αύξηση καθemιάς κατά 5 ευρώ, τότε έχουμε

$$\omega_i = x_i + 5 .$$

Σύμφωνα τώρα με την εφαρμογή 3, σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου έχουμε

$$\bar{y} = 1,2 \cdot \bar{x}_A = 1,2 \cdot 5 = 6 \text{ ευρώ και}$$

$$\bar{\omega} = \bar{x}_B + 5 = 8 + 5 = 13 \text{ ευρώ}$$

**δ.** Έχουμε

- $S_y = |1,2| \cdot S_A = 1,2 \cdot \sqrt{\frac{23}{3}} .$

- $S_\omega = S_B = \sqrt{\frac{41}{3}} .$

Επομένως οι συντελεστές μεταβολής των νέων ομάδων είναι αντίστοιχα:

$$CV_A = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{1,2 \cdot S_A}{1,2 \cdot \bar{x}_A} = CV_A \cong \sqrt{0,30}$$

$$CV_B = \frac{S_\omega}{\bar{\omega}} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{13} = \sqrt{\frac{41}{507}} \cong \sqrt{0,08} .$$

Συνεπώς  $CV_A > CV_B$ , που σημαίνει ότι η ομάδα Β' είναι περισσότερο ομοιογενής από την ομάδα Α' .