

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2004**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ είναι ίση με 0.
Μονάδες 8

B. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.

β. Στην κανονική κατανομή το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

γ. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i .
Μονάδες 6

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη **Στήλη I** αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη **Στήλη II** σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
α	πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1	$A \cap B$
β	πραγματοποιείται τό A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ	πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη **Στήλη II** περισεύει μία σχέση.

Μονάδες 6

Απάντηση:

A. Είναι: $A_f = R$

και $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$.

Οπότε για $h \neq 0$ είναι $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$.

Άρα $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$

Συνεπώς $(c)' = 0$

Β. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνον αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Γ. α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό

Δ. α. 4 β. 2 γ. 1

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 10

Β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Μονάδες 15

Απάντηση:

Α. Πρέπει (i) $x \geq 0$ και
(ii) $\sqrt{x} \neq \sqrt{3}$
δηλ $x \neq 3$

Άρα $A_f = [0, 3) \cup (3, +\infty)$.

Β. Για $x \in [0, 3) \cup (3, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x-3} = (x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} [(x-1) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})] = \\ &= (3-1) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Στην "Αττική οδό" εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις σε χλμ.	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i σε χλμ.	Σχετική συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i σε χλμ.	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα $F_i \%$
[5, 15)		60			
[15, 25)					68
[25, 35)				180	
[35, 45)					
Σύνολο		200			

A. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τις τιμές των αντίστοιχων μεγεθών.

Μονάδες 10

B. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i \%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} .

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων.

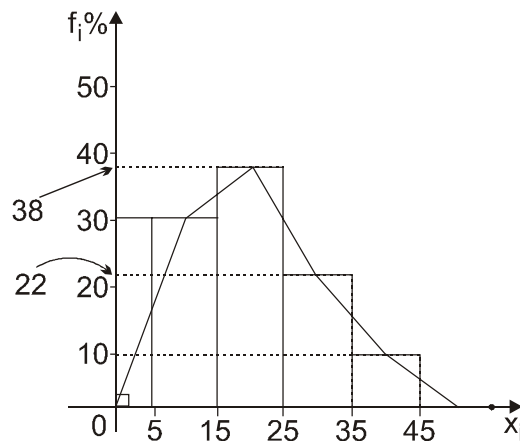
Μονάδες 5

Απάντηση:

A.

	x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
[5, 15)	10	60	30	60	30
[15, 25)	20	76	38	136	68
[25, 35)	30	44	22	180	90
[35, 45)	40	20	10	200	100
		200	100		

B.



$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 v_i x_i = \frac{10 \cdot 60 + 76 \cdot 20 + 30 \cdot 44 + 40 \cdot 20}{200} = \frac{600 + 1520 + 1320 + 800}{200} = \frac{4240}{200} = 21,2 \text{ Km}$$

Δ. Είναι $v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$ χιλιάδες οχήματα.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$.

Μονάδες 9

B. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

- i. $P(A \cap B)$
- ii. $P(A - B)$
- iii. $P[(A \cap B)']$
- iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$.

Μονάδες 16**Απάντηση:**

A. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σ' όλο το \mathbb{R} ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2 - 5x + 1$

Έτσι έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{1}{2} \right)$$

x	$-\infty$	$1/3$	$1/2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$					

T. μεγ. T. ελαχ.

Επομένως

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{1}{3}$$

B. Για τις τιμές των $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ βρίσκουμε:

i. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

ii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

iii. $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

iv. Τα ενδεχόμενα $A-B$, $B-A$ είναι ασυμβίβαστα σύμφωνα με την εφαρμογή 2 σελ. 153 σχολ. βιβλίου.

$$\begin{aligned} P[(A-B) \cup (B-A)] &= P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΚΕΡΚΥΡΑ

ΕΥ ΣΤΟΧΟΣ