

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2005

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να θεωρηθούν ισοπίθανα.

Μονάδες 10

B.

α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

Μονάδες 3

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 2

β. Ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 2

γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

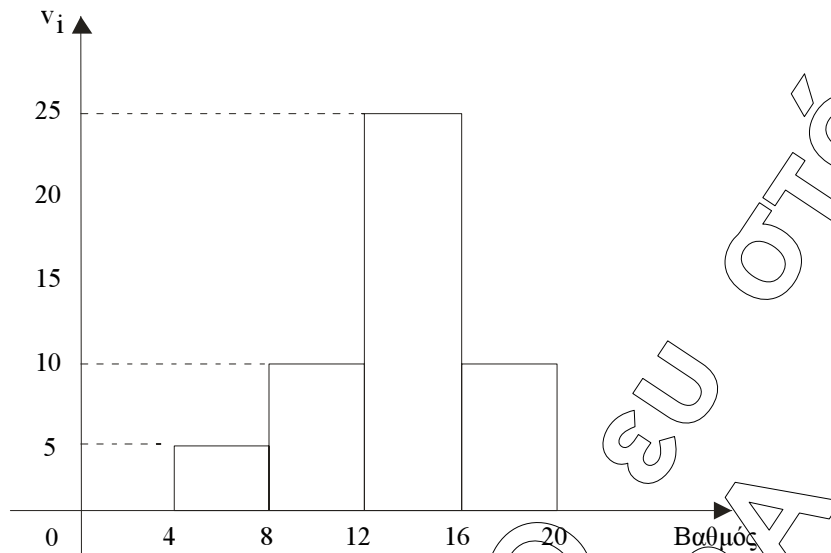
Μονάδες 2

δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i :



α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Κλάσεις βαθ/γίας I | Κέντρο κλάσης x_i | Συχνότητα v_i | Σχετική συχνότητα f_i | Αθροιστική συχνότητα N_i | Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i |
|----------------------|---------------------|-----------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| [4, 8) | | | | | |
| [8, 12) | | | | | |
| [12, 16) | | | | | |
| [16, 20) | | | | | |
| Σύνολο | | | | | |

Μονάδες 11

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 8

γ. Ποσοί μαθητές έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $7/8$

(ii) Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο

$$X = \left\{ k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}, \text{ όπου:}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

α. Να βρεθεί το k

Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A

Μονάδες 6

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $\Lambda(1,1)$.

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx' και yy' , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox , Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου M , ώστε η περίμετρος του ορθογώνιου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρεθεί η μέση τιμή \bar{y} και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

A.

3ος κανόνας λογισμού των πιθανοτήτων:

Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δύο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) + N(A) + N(B) - N(A \cap B), (1)$$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

B.

α. Ποσοτικές λέγονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί.

β. Διακριτή ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία παίρνει μόνο μεμονωμένες τιμές.

Συνεχής ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών (α, β) .

Γ.

$\alpha \rightarrow \Sigma$

$\beta \rightarrow \Lambda$

$\gamma \rightarrow \Lambda$

$\delta \rightarrow \Lambda$

ΘΕΜΑ 2

α.

| Κλάσεις βαθ/γίας () | Κέντρο κλάσης x_i | Συχνότητα v_i | Σχετική συχνότητα f_i | Αθροιστική συχνότητα N_i | Αθρ.σχετ. συχνότητα F_i |
|-------------------------|------------------------|--------------------|----------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| [4, 8) | 6 | 5 | 0,1 | 5 | 0,1 |
| [8, 12) | 10 | 10 | 0,2 | 15 | 0,3 |
| [12, 16) | 14 | 25 | 0,5 | 40 | 0,8 |
| [16, 20) | 18 | 10 | 0,2 | 50 | 1 |
| Σύνολο | | 50 | 1 | | |

$$\beta. \bar{x} = \frac{5 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 14 + 10 \cdot 18}{50} = \frac{660}{50} = 13,2.$$

γ. Βαθμό το πολύ μέχρι και 10 έχουν $5 + 5 = 10$ μαθητές.

ΘΕΜΑ 3

α. Είναι $\kappa = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x - 5)}{(x - 1)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x - 1} = \frac{3}{5 - 1} = \frac{3}{4}$.

β. Αφού $\kappa = \frac{3}{4}$, το σύνολο $X = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$.

Επειδή $\frac{5}{4} > 1$, η τιμή $\frac{5}{4}$ αποκλείεται να ισούται με κάποια από τις τιμές

$P(A \cap B), P(B)$. Έτσι $\{P(A \cap B), P(B)\} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right\}$.

Ισχύει $A \cap B \subseteq B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(B)$ και επειδή $P(A \cap B) \neq P(B)$ είναι $P(A \cap B) < P(B)$.

Άρα $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$.

γ.

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Άρα $\frac{7}{8} = P(A) + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, οπότε $P(A) = \frac{5}{8}$.

(2) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

ΘΕΜΑ 4

α.

1ος τρόπος λύσης:

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $\Lambda(1, 1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(1) = -1$.

Επομένως η εξίσωσή της είναι

$$y = -x + \beta.$$

Επειδή όμως το σημείο $\Lambda(1, 1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, είναι

$$1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -x + 2$.

2ος τρόπος λύσης:

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Lambda(1, 1)$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

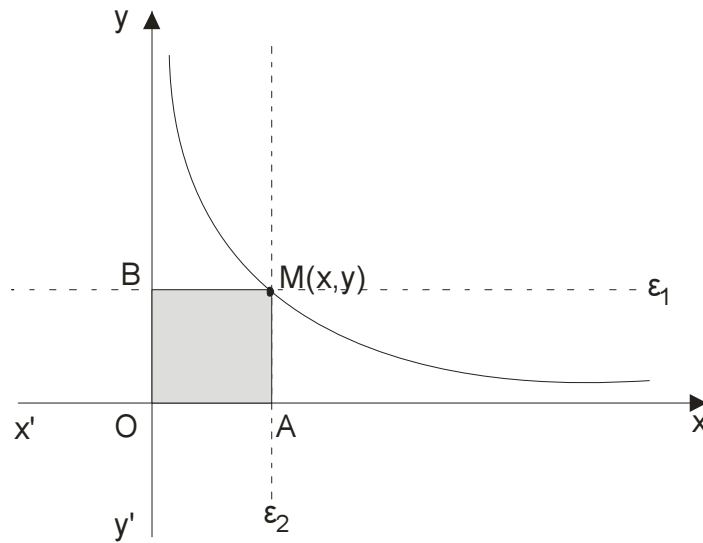
Όμως

$$f(1) = 1 \text{ και } f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Επομένως

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

β.



ΣΟΛΩ

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{1}{x}$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι ευθείες που διέρχονται από το M και είναι παράλληλες αντίστοιχα προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Η περίμετρος του σχηματιζόμενου ορθογωνίου παραλληλογράμου $OAMB$ είναι

$$\Pi = 2x + 2y = 2(x + y) \quad (1)$$

Λόγω της σχέσης $y = \frac{1}{x}$, η (1) γράφεται:

$$\Pi = 2\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{με } x \in (0, +\infty).$$

Η $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\Pi'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\frac{x^2 - 1}{x^2} = 2\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Από την εξίσωση $\Pi'(x) = 0$ έχουμε:

$$2\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = +1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Η τιμή $x = -1$ απορρίπτεται γιατί $x \in (0, +\infty)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|-----------|---|-------|-----------|
| $\Pi'(x)$ | | - | + |
| $\Pi(x)$ | | ελαχ. | |

$$\Pi(1) = 4$$

Οπότε για την τιμή $x = 1$, η $\Pi(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1, 1)$.

γ. Είναι :

$$\bar{y} = -\bar{x} + 2 = -3 \text{ και}$$

$$S_y = |-1|S_x = 2.$$