

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

## ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

2008

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$  (όπου  $x$  πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή  $(c)' = 0$ .

Μονάδες 8

B. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $x$ , αν και πώς, αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

β. Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

γ. Αν  $x > 0$ , τότε  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 2

δ. Αν  $x_0$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$$

Μονάδες 2

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 2

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι  $e^x f'(x) = 2 - x$

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)$ .

Μονάδες 9

### ΘΕΜΑ 3ο

Για δύο τύπους μπαταριών A και B επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου A και μιας μπαταρίας τύπου B.

**Μονάδες 5**

β. Αν μια μπαταρία τύπου A στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου B στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

**Μονάδες 5**

γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

**Μονάδες 7**

δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του. Δίνεται ότι  $\sqrt{11} \cong 3,3$

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ 4ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

**Μονάδες 7**

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

**Μονάδες 9**

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  δεν έχει ακρότατα.

**Μονάδες 9**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Θεωρία: (Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$ ), Σελ. 28 σχολ. βιβλίο.

**B.** Θεωρία: Σελ. 96 σχολ. βιβλίο.

**Γ.**

**α** - Λ

**β** - Λ

**γ** - Σ

**δ** - Σ

**ε** - Σ.

### ΘΕΜΑ 2ο

**α.** Είναι  $\frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x-1}{e^x} = \frac{1}{x+1}$

Έτσι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ .

**β.** Είναι  $f'(x) = \left( \frac{x-1}{e^x} \right)' = \frac{(x-1)'e^x - (x-1)(e^x)'}{e^{2x}} =$   
 $= \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$

Έτσι:  $e^x f'(x) = e^x \cdot \frac{2-x}{e^x} = 2-x$ .

**γ.** Επειδή  $e^x > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτουν:

**i)**  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

**ii)**  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

**iii)**  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$

Δηλαδή έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	+	○	-
f	↗		↘
		$\frac{1}{e^2}$	

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 2]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[2, +\infty)$ , ενώ  $f'(2) = 0$ .

Άρα η  $f$  έχει μέγιστο για  $x = 2$ ,  $f(2) = \frac{1}{e^2}$ .

### ΘΕΜΑ 3ο

α.  $\bar{x}_A = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = \frac{110}{5} = 22$

$$\bar{x}_B = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

β. Κατά μέσο όρο μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει  $\frac{38}{22} = \frac{19}{11}$  ευρώ / χίλιες ώρες ,  
ενώ

μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει  $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$  ευρώ / χίλιες ώρες

Επειδή  $\frac{5}{3} < \frac{19}{11}$  συμφέρει να αγορασθεί μπαταρία τύπου Β.

γ.  $S_A^2 = \frac{1}{5} [(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2] =$

$$= \frac{1}{5} [(-2)^2 + (4)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2] =$$

$$= \frac{1}{5} (4+16+4+16) = \frac{40}{5} = 8$$

οπότε  
 $S_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$S_B^2 = \frac{1}{5} [(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2] =$$

$$= \frac{1}{5} [(2)^2 + 8^2 + (-5)^2 + (-4)^2 + 1^2] =$$

$$= \frac{1}{5} (4 + 64 + 25 + 16 + 1) = \frac{110}{5} = 22$$

οπότε

$$S_B = \sqrt{22} = \sqrt{2}\sqrt{11}$$

$$\delta. \quad CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}.$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24}.$$

Είναι  $CV_B > CV_A$  διότι  $\frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24} > \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{24} > \frac{1}{11} \Leftrightarrow 11\sqrt{11} > 24$ , που ισχύει επειδή  $\sqrt{11} \cong 3,3$  και  $11 \cdot 3,3 > 24 \Leftrightarrow 36,3 > 24$ .

Άρα το δείγμα A παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς την διάρκεια ζωής σε σχέση με το δείγμα B.

#### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω A το ενδεχόμενο οι κάτοικοι της πόλης να διαβάζουν την εφημερίδα α και B το ενδεχόμενο να διαβάζουν την εφημερίδα β.

Τότε από τα δεδομένα προκύπτει ότι:  $P(A) = 0,5$ ,  $P(A - B) = 0,3$ .

α. Ζητείται η  $P(A' \cup B)$ .

$$\begin{aligned} \text{Όμως } P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) = \\ &= 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - [P(A) - P(A \cap B)] = 1 - P(A - B) = 1 - 0,3 = 0,7 = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

β. Επειδή  $B \subseteq A' \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A' \cup B) \Rightarrow P(B) \leq \frac{7}{10}$ .

Επίσης από  $P(A - B) = 0,3$  έχουμε:

$$P(A) - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow 0,5 - P(A \cap B) = 0,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2 = \frac{1}{5}.$$

Όμως  $A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow \frac{1}{5} \leq P(B)$ .

γ. Είναι  $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$ .

Η  $f'$  είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα  $\Delta = 1 - 12 \cdot P(B)$ .

Επειδή  $P(B) \geq \frac{1}{5}$  έπεται  $-12P(B) \leq -\frac{12}{5}$  και  $1 - 12P(B) \leq 1 - \frac{12}{5} = -\frac{7}{5} < 0$

Αφού  $\Delta < 0$ , είναι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbf{R}$  και επομένως δεν έχει ακρότατα.