

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2011

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

A2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} . Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\operatorname{εφ} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$.

Μονάδες 4

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$.

Μονάδες 8

B4. Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμψής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία (θεώρημα Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

A2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

A3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad (1)$$

Όμως $|\bar{z} + 3i| = |\overline{z + 3i}| = |z - 3i| \quad (2)$

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$|z - 3i| + |z - 3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1 \quad (3)$$

Αν $z = x + yi$ η (3) γράφεται $|x + (y - 3)i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

B2. Από το ερώτημα B1 έχουμε: $|z - 3i| = 1$

Οπότε $|z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i) \cdot (\bar{z} - 3i) = 1 \Leftrightarrow (z - 3i) \cdot (\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$.

B3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z έχουμε ότι: $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Και επειδή $x = \operatorname{Re}(z)$ προκύπτει ότι: $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$.

Οπότε: $-2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2$. Άρα $-2 \leq w \leq 2$.

B4. Είναι: $|z - w| = \left| z - z + 3i - \frac{1}{z - 3i} \right| = \left| 3i - \frac{1}{z - 3i} \right| = |3i - \bar{z} - 3i| = |-\bar{z}| = |z|.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$

$$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ προκύπτει: $e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1$

και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι $c_1 = -1$.

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = [\ln(e^x - x)]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2$$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_2 = 0$.

Έτσι $f(x) = \ln(e^x - x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x) = e^x - x, \quad x \in \mathbb{R}$, είναι: $h'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h	$-$	0	$+$
h			

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ την τιμή $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Δηλαδή $h(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f'(x) = [\ln(e^x - x)]' = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του

αριθμητού $h'(x) = e^x - 1$.

Συνεπώς $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
 και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 0$ την τιμή $f(0) = \ln(e^0 - 0) = \ln 1 = 0$.

Γ3. Είναι: $f''(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} =$

$$= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} - xe^x - (e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -e^x + (2 - x) \cdot e^x = e^x(1 - x) \\ \varphi'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \varphi'(x) &> 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ \varphi'(x) &< 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Φ'	+	0	-
Φ		$e - 1$	

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1) = e - 1 > 0$.

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty, +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2 - x) \cdot e^x - 1] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{e^{-x}} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 - x)'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1.$$

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi((-\infty, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-1, e-1].$$

$$\varphi([1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \varphi(1) \right] = (-\infty, e-1].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0 \in \varphi((-\infty, 1])$ άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 1]$ ώστε $\varphi(x_1) = 0$.

Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει πρόσημο. Διότι με $x < x_1$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$

Ενώ με $1 > x > x_1$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x - x)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty, 1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0 \in \varphi([1, +\infty))$ άρα υπάρχει $x_2 \in [1, +\infty)$, ώστε $\varphi(x_2) = 0$. Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο.

Διότι με $1 < x < x_2$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$

Ενώ με $x > x_2$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$.

Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1, +\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1, x_2 .

Γ4. Θέτουμε $g(x) = \ln(e^x - x) - \sin x \equiv f(x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Υπαρξη: Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο \mathbb{R} , άρα και στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $g(0) = f(0) - \sin(0) = -1 < 0$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$, άρα είναι $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

Έτσι $g(0) \cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε

$f(x_1) < f(x_2)$ διότι $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

$\sin x_1 > \sin x_2$ διότι $\sin x \downarrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Άρα $-\sin x_1 < -\sin x_2$.

Έτσι όμως $f(x_2) - \sin x_1 < f(x_2) - \sin x_2$, άρα $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Παρατήρηση (2^{ος} τρόπος για τη μονοτονία):

Η μονοτονία της g στο $[0, \pi/2]$ μπορεί να προκύψει και ως εξής: $g'(x) = f'(x) + \eta\mu x$.

Όμως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα και για κάθε $x \in (0, \pi/2)$,

ενώ επίσης $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi/2)$.

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi/2)$ και επομένως g γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi/2]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

Θέτουμε: $x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$. Οπότε: $dt=du$.

Ακόμη για $t=0$ έχουμε $u=x$ και για $t=-x$ έχουμε $u=0$.

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = \int_x^0 e^{-2x} \frac{e^{2u}}{g(u)} du = e^{-2x} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = -e^{2x} e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Άρα } f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \quad (1)$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο $[0, x]$ με $x \in \mathbb{R}$

συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμες

στο \mathbb{R} , επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$$

$$\text{οπότε } f'(x)g(x) = e^{2x} \quad \text{και} \quad g'(x)f(x) = e^{2x}$$

άρα

$$f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι: $\frac{f(x)}{g(x)} = c$

και επειδή $f(0) = g(0) \stackrel{(1)\&(2)}{=} 1$, θα είναι $c = 1$.

Άρα $f(x) = g(x)$.

Δ2. Επειδή είναι:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow \text{(Ερώτημα Δ1)}$$

$$f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$$f^2(x) = e^{2x} + c$$

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $c = 0$.

$$\text{Άρα } f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [e^x]^2 \Leftrightarrow |f(x)| = e^x$$

Και επειδή $f(x) > 0$, προκύπτει ότι $f(x) = e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x} + \infty}}{\frac{1}{x}} = (De L'Hospital) (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = -\infty.$$

$$(*) : \text{Θέτουμε } \frac{1}{x} = y \text{ οπότε το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{y} = \frac{+\infty}{-\infty}.$$

Δ4. Είναι $F'(x) = f(x^2) > 0$. Άρα η F ↑ στο $[0, 1]$.

Άρα για $0 \leq x \leq 1$ θα είναι $F(x) \leq F(1)$ και επειδή $F(1) = 0$, προκύπτει ότι $F(x) \leq 0$ $\forall x \in [0, 1]$.

Επομένως $\forall x \in [0, 1]$, θα είναι:

$$E = - \int_0^1 F(x) dx = - \int_0^1 x' F(x) dx = - [x F(x)]_0^1 + \int_0^1 x F'(x) dx =$$

$$= -F(1) + \int_0^1 x \left(\int_1^x f(t^2) \right) dx = \int_0^1 x f(x^2) dx =$$

$$= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) \text{ τ.μ.}$$