Μαθηματικά
Θετικής Κατεύθυνσης
Γ' Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

Α.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

Β.1. Αν:

$$z_1 = 3 + 4i \text{ και } z_2 = 1 - \sqrt{3}i,$$

να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert \bar{z_1} \rvert$	**δ.** −5
5. $\lvert i z_2 \rvert$	**ε.** −2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει |z| = 1, να δείξετε ότι:

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

Μονάδες 5

Απάντηση:

Α1. Θεωρία παράγραφος 2.3 σχολικού βιβλίου.

Α2. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

Β1. 1. ζ
2. γ
3. α
4. δ
5. β

Β2. |z| = 1 άρα $|z|^2 = 1$

Ζήτημα 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = −1/9.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 2.

Μονάδες 9

Απάντηση:

α. Αφού *f* συνεχής είναι:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3) = 9\alpha$$

Όμως:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(\alpha x^2) = 9\alpha$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{-e^{x-3}}{1}\right) = -1$$

Έτσι: 9α = -1. Άρα α = -1/9

β. Για x > 3 με f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x) = \left(\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{\left(1-e^{x-3}\right)'(x-3)-(1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-xe^{x-3}+3e^{x-3}-1+e^{x-3}}{(x-3)^2} = \frac{-xe^{x-3}+4e^{x-3}-1}{(x-3)^2} = \frac{(4-x)\,e^{x-3}-1}{(x-3)^2}$$

Έτσι:

$$f'(4) = \frac{-1}{(4-3)^2} = -1$$

και αφού:

$$f(4) = \frac{1-e^{4-3}}{4-3} = \frac{1-e}{1} = 1-e$$

η εξίσωση της εφ/νης είναι:

$$y-(1-e) = -1(x-4) \Leftrightarrow y = -x-e+5$$

γ. Επειδή για $x \in [1,2]$ είναι:

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$$

Έχουμε:

$$E = -\int_1^2\left(-\frac{1}{9}x^2\right)dx = -\left[-\frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= +\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{27} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

Παρατήρηση

Επειδή στην εκφώνηση του θέματος δεν διευκρινίζεται αν στο ερώτημα γ η τιμή του α πρέπει να ληφθεί ως -1/9, παρατηρούμε ότι:

(i) αν το α ληφθεί ως -1/9 τότε η τιμή του εμβαδού είναι:

$$E = \frac{7}{27} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

(ii) αν όμως δεν υπονοείται κάτι τέτοιο τότε η λύση θα έχει ως εξής:

- αν $\alpha \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ οπότε :

$$E = \int_1^2 ax^2 dx = \frac{7a}{3} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

- αν $\alpha < 0$ τότε $f(x) < 0$, οπότε:

$$E = -\int_1^2 ax^2 dx = -\frac{7a}{3} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

Ζήτημα 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \Re,$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

Απάντηση:

α) Αφού *f* παραγωγίσιμη στο $\Re$, παραγωγίζουμε την δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \Re$$

Δηλαδή:

$$f'(x) \cdot [3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \Re \qquad (1)$$

Όμως:

$$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Re$$

αφού: $\alpha = 3 > 0$ και $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$

και $3x^2 - 4x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \Re$

αφού: $\Delta = 16 - 12 \cdot 6 < 0$ και $\alpha = 3 > 0$

Οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$

Επομένως δεν υπάρχουν ακρότατα.

β) Επειδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

γ) Είναι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1,\ x \in \Re$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1,\ x \in [0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$$g(0) = -1 < 0$$
$$g(1) = 4 > 0$$

Άρα, από Θ.Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$: $g(x_0) = 0$ (2)

Για $x = x_0$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$f^3(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f(x_0) = g(x_0)$$

οπότε από την σχέση (2) είναι:

$$f(x_0) \cdot [f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma] = 0 \quad (3)$$

Όμως:

$$f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma > 0$$

Γιατί:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma = (\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$$

Αυτό συμβαίνει γιατί:

$$\beta^2 < 3\gamma \quad \text{οπότε} \quad \gamma > 0, \quad \text{άρα} \quad -\gamma < 0$$

Άρα:

$$(\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$$

Επομένως, από την σχέση (3) προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$:

$$f(x_0) = 0$$

κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1), προκύπτει ότι η λύση x_0 είναι μοναδική στο (0,1).

Ζήτημα 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\Re$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Re$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\, dt$, για κάθε $x \in \Re$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$$

για κάθε $x \in \Re$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει:

$$f'(x) = -2xf^2(x)$$

(όπου f'(x) είναι η παράγωγος της συνάρτησης f).

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ f(x)\ \eta\mu\, 2x\right)$

Μονάδες 7

Απάντηση:

α) Θέτουμε x t = u και διαφορίζουμε ως προς t.
Έτσι έχουμε d(x t) = du ή x dt = du

Ακόμα για

- t = 0 έχουμε u = 0 και
- t = 1 έχουμε u = x.

Άρα:

$$f(x) = 1 - 2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^1 x^2tf^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^x uf^2(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Re$, προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$\int_0^x uf^2(u)du$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Άρα: $f'(x) = -2x\, f^2(x)$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - x^2\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \overset{(a)}{=}$$

$$= -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = +2x - 2x = 0$$

για κάθε x $\in \Re$. Επομένως η g(x) σταθερή.

γ) (α' τρόπος)

Επειδή η συνάρτηση g είναι σταθερή δηλαδή g(x) = c για κάθε x $\in \Re$, θα είναι για x = 0: g(0) = c.

Ακόμα:

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} - 0^2 = \frac{1}{f(0)}$$

οπότε:

$$\frac{1}{f(0)}=c$$

Από την (ii) για x = 0 έχουμε f(0) = 1.

Επομένως: c = 1.

Άρα: g(x) = 1 και λόγω της:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$$

προκύπτει:

$$1=\frac{1}{f(x)}-x^2 \Leftrightarrow 1+x^2=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

γ) (β' τρόπος)

Από f΄(x) = -2x f(x) και επειδή f(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in \Re$ είναι:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x$$

ή

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=(x^2)'$$

Άρα:

$$\frac{1}{f(x)}=x^2+c, \quad c\in\Re$$

Όμως:

$$f(0)=1-\int_0^0 uf^2(u)du=1$$

Έτσι:

$$\frac{1}{f(0)}=0^2+c$$

1 = c.

Οπότε:

$$\frac{1}{f(x)}=x^2+1$$

Άρα:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

δ) Επομένως:

$$x\cdot f(x)\cdot \text{ημ}2x=x\cdot\frac{1}{1+x^2}\text{ημ}2x=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}\text{ημ}2x, \quad x\in\Re$$

Έχουμε:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right| = \left|\frac{x}{1+x^2}\right|\left|\eta\mu 2x\right| \le \left|\frac{x}{1+x^2}\right|$$

οπότε:

$$\left|\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right| \le \left|\frac{x}{1+x^2}\right|, \quad x \in \Re$$

ή

$$-\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right) \le \left|\frac{x}{1+x^2}\right|, \quad x \in \Re$$

Όμως:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

οπότε:

$$\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{x}{1+x^2}\right| = \left|\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2}\right| = 0$$

Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right) = 0$$