

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. (ΟΜΑΔΑ Α')

2009

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας (μεταβολής) ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι μικρότερη του 10%, τότε ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

Μονάδες 3

β. $(\sin x)' = \eta \mu x$

Μονάδες 3

γ. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (a, b) .

Μονάδες 3

δ. $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$, όπου c σταθερά.

Μονάδες 3

Γ. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $(f \cdot g)'(x) \cong \dots\dots\dots$

Μονάδες 2

β. $(c \cdot f)'(x) = \dots\dots\dots$ όπου c σταθερά.

Μονάδες 2

γ. $\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \dots\dots\dots$ με $b > a > 0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Ρωτήθηκαν 25 μαθητές μιας τάξης ενός Λυκείου πόσα λογοτεχνικά βιβλία διάβασαν την περσινή χρονιά. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Βιβλία x_i | Μαθητές v_i | Σχετική Συχνότητα $f_i \%$ | Αθροιστική Συχνότητα | Αθροιστική Σχετική Συχνότητα % | $x_i v_i$ |
|-----------------|------------------|----------------------------------|-------------------------|---|-----------|
| 1 | 4 | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | 8 | | | | |
| 4 | 7 | | | | |
| Αθροίσματα | | | | | |

Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

Β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

Γ. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

Δ. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασε τουλάχιστον δύο (2) βιβλία;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -x^2 + 6x + 8$

Α. Να υπολογίσετε την $f'(x)$

Μονάδες 4

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 8

Γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο; Να βρείτε το είδος του ακροτάτου.

Μονάδες 6

Δ. Να υπολογίσετε το $\int_0^3 f(x) dx$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 4x + 2ae^x$

$$\text{όπου } a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

A. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Μονάδες 5

B. Για $a = 1$

α. Να υπολογίσετε την $f'(x)$

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$, είναι ίσο με $84 + 2e^4 - 2e^2$ τ.μ.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A) Θεωρία: Ορισμός σελ. 134 σχολικού βιβλίου.

B)

| | | | |
|----------|-----------|-----------|----------|
| α | β | γ | δ |
| Σ | Λ | Λ | Σ |

Γ) α) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

β) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$.

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln \beta - \ln \alpha = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$.

ΘΕΜΑ 2ο

A)

| Βιβλία x_i | Μαθητές v_i | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική Συχνότητα | Αθροιστική Σχετική Συχνότητα % | $x_i v_i$ |
|-----------------|------------------|---------------------------------|-------------------------|---|-----------|
| 1 | 4 | 16 | 4 | 16 | 4 |
| 2 | 6 | 24 | 10 | 40 | 12 |
| 3 | 8 | 32 | 18 | 72 | 24 |
| 4 | 7 | 28 | 25 | 100 | 28 |
| Αθροίσματα | 25 | 100 | | | 68 |

B) Από τον πίνακα προκύπτει ότι η διάμεσος τιμή (13η τιμή σε αύξουσα ταξινόμηση) είναι $\delta = 3$.

Γ) $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = \frac{68}{25}$.

Δ) Το ποσοστό των μαθητών που διάβασε τουλάχιστον 2 βιβλία είναι $(24 + 32 + 28)\% = 84\%$

ΘΕΜΑ 3^ο

A) Είναι $f'(x) = (-x^2 + 6x + 8)' = -2x + 6$.

B) Έχουμε ότι $f'(x) = -2x + 6$ και τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών.

| | | | |
|----|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| f' | + | | - |
| f | ↗ | | ↘ |

Γ) Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών η f παρουσιάζει στο $x_0 = 3$ τοπικό μέγιστο.

Δ) Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^3 (-x^2 + 6x + 8) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + 8x \right]_0^3 = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_0^3 = \\ &= \left[-\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 + 24 \right] - [0] = \\ &= [-9 + 27 + 24] = 42. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A) Είναι: $a = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1$.

B)

α) Για $a = 1$ είναι $f(x) = x^3 + 4x + 2e^x$.
Έτσι $f'(x) = 3x^2 + 4 + 2e^x$.

β) Επειδή είναι $3x^2 + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, καθώς επίσης και $2e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

γ) Επειδή f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} θα έχουμε ότι:

$$\text{Αν } 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow$$

$$f(2) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow$$

$$2^3 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot e^2 \leq f(x) \leq 4^3 + 4 \cdot 4 + 2e^4 \Rightarrow$$

$$0 < 16 + 2e^2 \leq f(x) \leq 80 + 2e^4.$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 (x^3 + 4x + 2e^x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 2e^x \right]_2^4$$

$$= (4^3 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot e^4) - (4 + 2 \cdot 2^2 + 2e^2) =$$

$$= 84 + 2e^4 - 2e^2 \text{ τ.μ.}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΚΕΡΚΥΡΑ