<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2011

<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές.

(Μονάδες 2)

β) Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \ell_1 \cdot \ell_2$

(Μονάδες 2)

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g'(x),\ x\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x \,\mathrm{d}x = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha$.

(Μονάδες 2)

ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

(Μονάδες 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(\ln x)' =$ ……………………, με $x > 0$ (Μονάδες 3)

β) $(\eta\mu\, x)' =$ …………………… (Μονάδες 3)

γ) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $a \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ……… (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-4} & \text{αν} \quad x<4 \\ \alpha & \text{αν} \quad x=4 \\ \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}-3 & \text{αν} \quad x>4 \end{cases}$$

Β1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

Μονάδες 10

Β2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

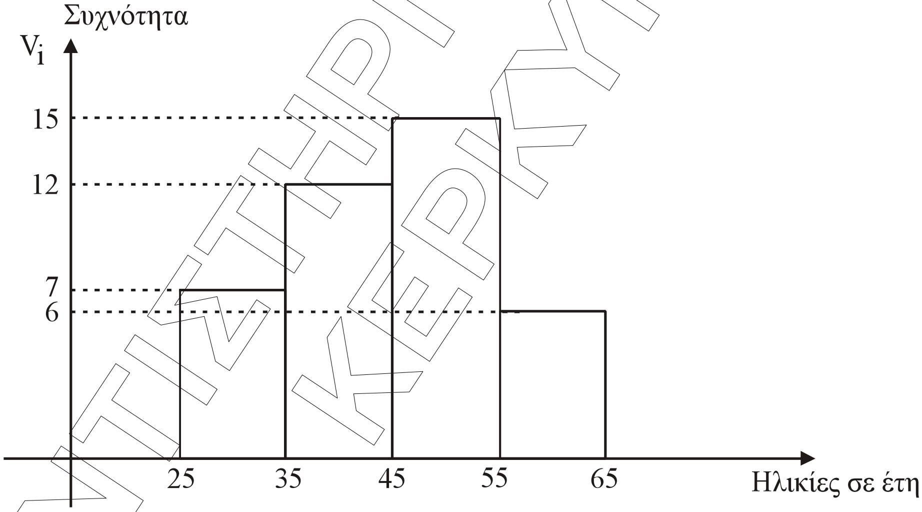
Μονάδες 10

Β3. Να βρείτε για ποια τιμή του $a\in\mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0=4$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [,)	**Μέσο διαστήματος K_i**	**Συχνότητα v_i**	**$K_i \cdot v_i$**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Σχετική Συχνότητα $f_i\%$**
[25,35)					
[35,45)					
[45,55)					
[55,65)					
Σύνολα					

Μονάδες 10

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων.

Μονάδες 5

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών;

Μονάδες 5

Γ4. Τί ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$

Μονάδες 6

Δ4. Αν $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ με $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 3$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Θεωρία: Εύρος μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής.

Α2. **α)** → Σ, **β)** → Σ, **γ)** → Λ, **δ)** → Λ, **ε)** → Σ.

Α3.

α) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, με $x > 0$.

β) $(\eta\mu\, x)' = \sigma\upsilon\nu\, x$.

γ) Αν f συνεχής στο R με α ∈ R, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x < 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = x - 3 .$$

Έτσι $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (x - 3) = 4 - 3 = 1$.

Β2. Για $x > 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 = \sqrt{x} + 2 - 3 = \sqrt{x} - 1 .$$

Έτσι $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} (\sqrt{x} - 1) = \sqrt{4} - 1 = 1$.

Β3. Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 4$, πρέπει και αρκεί:

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow a = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ηλικίες [,)	**Μέσο διαστήματος K_i**	**Συχνότητα v_i**	**$K_i \cdot v_i$**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Σχετική Συχνότητα $f_i\%$**
[25,35)	30	7	210	7	17,5
[35,45)	40	12	480	19	30
[45,55)	50	15	750	34	37,5
[55,65)	60	6	360	40	15
Σύνολα		40	1800		100

Γ2. Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει: $\overline{x} = \dfrac{1800}{40} = 45$.

Γ3. Από τον ίδιο πίνακα προκύπτει ότι ηλικία τουλάχιστον 45 ετών έχουν: 15 + 6 = 21 εργαζόμενοι.

Γ4. Από τη στήλη της σχετικής συχνότητας του πίνακα προκύπτει ότι ηλικία κάτω των 35 ετών έχουν το 17,5 % των εργαζομένων.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με:

$$f'(x) = \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right)' = 3x^2 - 12x + 9 =$$
$$= 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)\cdot(x-3), \quad x \in R.$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

Δ2. Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 1$, την τιμή $f(1) = 5$, ενώ έχει και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 3$, την τιμή $f(3) = 1$.

Δ3. Είναι $\mathrm{I} = \int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα: $\int_0^3 |g(x)|\,\mathrm{d}x$

Όμως επειδή είναι $g(x) = f'(x)$ γνωρίζουμε από τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$ ότι είναι

α) για $x \in [0, 1]$: $g(x) = f'(x) \geq 0$.
β) για $x \in [1, 3]$: $g(x) = f'(x) \leq 0$.

Έτσι είναι:

$$E = \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_1^3 |g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_0^1 - \left[f(x)\right]_1^3 =$$
$$= f(1) - f(0) - f(3) + f(1) = 5 - 1 - 1 + 5 = 8 \text{ τ.μ.}$$