ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. (Μονάδες 2)

β) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (Μονάδες 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$ με $\alpha < \gamma < \beta$. (Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$ (Μονάδες 2)

ε) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g'. Τότε ισχύει ότι:

$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,g(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g'(x)\,dx$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ldots$ με $\beta > \alpha > 0$ (Μονάδες 3)

β) Έστω συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $gof : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι: $(gof)'(x) = \ldots$ (Μονάδες 3)

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = \ldots$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	**Μαθητές** ν_i	**Αθροιστική Συχνότητα** N_i	**Σχετική συχνότητα (%)** $f_i\%$	$x_i\,\nu_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa + 1$			
Σύνολα	$\nu = 25$		100	

Β1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ.

Μονάδες 4

Β2. Για $\kappa = 3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

Β3. Για $\kappa = 3$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

Β4. Για $\kappa = 3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x>1\\ \alpha x^2+\beta x, & \text{αν } x\le 1\end{cases} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f, αν $F(0) = 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F.

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$.

Μονάδες 7

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 81 Σχολ. βιβλίου.

Α2. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Σ.

Α3. **α)** $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx = \ln\beta - \ln\alpha$, **β)** $\left(gof\right)'(x) = g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$, **γ)** $\int_\alpha^\beta c\,dx = c(\beta-\alpha)$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πλήθος των μαθητών είναι 25, άρα 6 + 5 + 4 + κ + 2κ + 1 = 25 $\Leftrightarrow$ κ = 3.

Β2.

Ημερήσιες ώρες x_i	**Μαθητές ν_i**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Σχετική Συχνότητα % f_i %**	**$x_i \nu_i$**
1	6	6	24%	6
2	5	11	20%	10
3	4	15	16%	12
4	3	18	12%	12
5	7	25	28%	35
Σύνολο	ν = 25		100	75

Β3. Μέση τιμή: Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι:
$\bar{x} = \frac{6+10+12+12+35}{25} = \frac{75}{25} = 3$ ώρες.
Η διάμεσος δ ισούται με τη μεσαία παρατήρηση x_{13}, η οποία από τη στήλη της αθροιστικής συχνότητας του προηγούμενου πίνακα προκύπτει 3.
Είναι δηλαδή $\delta = x_{13} = 3$ ώρες.

Β4. Το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν 3 ώρες τουλάχιστον ημερησίως, από τον πίνακα προκύπτει $\frac{4+3+7}{25} = \frac{14}{25} = 56\%$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\alpha x^2 + \beta x\right) = \alpha + \beta$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x+3}+2\right) = 4$.

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν $\alpha + \beta = 4$ (1).
Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,\, 2)$ όταν
$f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha(-1)^2 + \beta(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για την παράγουσα F της f έχουμε: $F(x) = x^3 - x^2 - x + c$. Επειδή $F(0) = 1$ έπεται $c = 1$ οπότε $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Δ2. Είναι $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 3(x - 1)\cdot(x + \frac{1}{3})$. Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολής:

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	-	0	+	
$F(x)$		↗		↘		↗	
			τ.max		τ.min		

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $[1, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{1}{3}, 1]$. και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $F(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$ και τοπικό ελάχιστο $F(1) = 0$.

Δ3. Επειδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και $2011, 2012 \in [1, +\infty)$ με $2011 < 2012$ προκύπτει ότι $F(2011) < F(2012)$.

Δ4. Είναι $E(\Omega) = -\int_0^1 \left(3x^2 - 2x - 1\right)dx = -\left[x^3\right]_0^1 + \left[x^2\right]_0^1 + [x]_0^1 = -1 + 1 + 1 = 1$ τ.μ.