ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2013

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνεχής συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

(Μον. 2)

β) Εάν οι συναρτήσεις f, g: $A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

(Μον. 2)

γ) Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(Μον. 2)

δ) Ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta e^x\,dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$.

(Μον. 2)

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_\alpha^\beta \text{ημ}x\,dx = \ldots$

(Μον. 3)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c μία σταθερά, τότε:
$(c \cdot f)'(x) = \ldots$

(Μον. 3)

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$, τότε:
$(x^\alpha)' = \ldots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x, & \text{αν} \quad 0 < x \le 1 \quad \text{και} \quad a \in \mathbb{R} \\ \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}, & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

Β1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

Μονάδες 7

Β2. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$.

Μονάδες 10

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μίας εταιρείας (σε εκατοντάδες €):

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	**Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i**	**Σχετική συχνότητα $f_i\%$**	**$x_i v_i$**
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	$v = \ldots$	100	

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των μισθών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Τι ποσοστό υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 €;

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2\,(x+\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (x-2)(3x + 2\alpha - 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$.

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x^2 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 6x - 24$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τη σταθερή διαφορά F(β) − F(α) ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α ως το β και το συμβολίζουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Α2. α → Σ, β → Σ, γ → Λ, δ → Λ, ε → Σ.

Α3. **α)** $\int_{\alpha}^{\beta} \text{ημ}x dx = \left[-\text{συν}x\right]_{\alpha}^{\beta} = -\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha.$

β) $(cf)'(x) = cf'(x).$

γ) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}.$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2\cdot1 + \ln1 = \alpha^2.$

Β2. $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to1^+} \dfrac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$

$= \lim_{x\to1^+} \dfrac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4} = \lim_{x\to1^+} x\left(\sqrt{x+3}+2\right) = 1\left(\sqrt{x+3}+2\right) = 4.$

Β3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν
$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha = -2.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25	25/50 = 50%	150
10	17	17/50 = 34%	170
15	6	6/50 = 12%	90
20	2	2/50 = 4%	40
Σύνολα	50	100	450

Γ2. $\bar{x} = \dfrac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v} = \dfrac{450}{50} = 9.$

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων με μισθό το πολύ 1000 € είναι 50% + 34% = 84%.

Γ4. $s^2 = \dfrac{v_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2 + v_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2 + v_3\left(x_3-\bar{x}\right)^2 + v_4\left(x_4-\bar{x}\right)^2}{v} =$

$= \dfrac{25(6-9)^2 + 17(10-9)^2 + 6(15-9)^2 + 2(20-9)^2}{50} =$

$= \dfrac{25\cdot 9 + 17\cdot 1 + 6\cdot 36 + 2\cdot 121}{50} = \dfrac{700}{50} = 14.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = [(x-2)^2 \cdot (x+\alpha)]' = [(x-2)^2]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)' =$
$2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2)(2x+2\alpha+x-2) = (x-2)(3x+2\alpha-2),\ x \in \mathbb{R}.$

Δ2. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$, θα είναι $f'(4) = 0$.
Όμως $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$ οπότε
$(4-2)(3\cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow 2(10+2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$

Δ3. Για την τιμή $\alpha = -5$ είναι:

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-5) \ \text{ και } \ f'(x) = (x-2)\cdot(3x-12)$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(3x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 4.$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	
			τ.max f(2)=0		τ.min f(4)=-4		

Δ4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των g, h, λύνοντας την εξίσωση $g(x) = h(x)$.

$g(x) = h(x) \iff 3x^2 - 12x = 6x - 24 \iff 3x^2 - 18x + 24 = 0 \iff$
$\iff 3(x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2$ ή $x = 4$.
Είναι $g(x) - h(x) = 3(x-2)(x-4)$.
Το πρόσημο της $g - h$ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
g(x)-h(x)		+	0	-	0	+	

Έτσι

$$E(\Omega) = -\int_2^4 (3x^2 - 18x + 24)\,dx = -\left[x^3 - 9x^2 + 24x\right]_2^4 =$$
$$= -\left[(64 - 144 + 96) - (8 - 36 + 48)\right] = 4 \text{ τ.μ.}$$