<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι</u>

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2014

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται μία συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και η F είναι μία παράγουσα της f, τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

(Μον. 2)

β) Το εύρος των τιμών μιας μεταβλητής δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της.

(Μον. 2)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ μία σταθερά, τότε ισχύει:

$$(c \cdot f)'(x) = f'(x) + c$$

(Μον. 2)

δ) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha+1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$.

(Μον. 2)

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε: $(f - g)'(x) = \ldots$

(Μον. 3)

β) $\int_\alpha^\beta \text{συν}x\,dx = \ldots$

(Μον. 3)

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}, \quad$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \ldots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε το f(2).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ηλικίες των υπαλλήλων μίας εταιρείας:

Α/Α	**Ηλικίες υπαλλήλων**	**Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i**	**Κέντρο κλάσης x_i**	**$x_i\ \nu_i$**	**Σχετική συχνότητα f_i %**
1η κλάση	[25, 35)	100			
2η κλάση	[35, 45)	50			
3η κλάση	[45, 55)	40			
4η κλάση	[55, 65)	10			
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 200$			

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση ηλικία των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν ηλικία τουλάχιστον σαράντα πέντε (45) ετών.

Μονάδες 4

Γ4. Από την εταιρεία αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι της 4ης κλάσης, πέντε (5) υπάλληλοι της 2ης κλάσης και ταυτόχρονα προσλαμβάνονται δέκα (10) υπάλληλοι με ηλικίες στην 1η κλάση. Να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή της ηλικίας των υπαλλήλων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = f(x) + e^x$.

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 9

Δ3. Αν $g(x) = f(x) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα x x′ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ 138 σχολικού βιβλίου.

Α2. α → Σ, β → Λ, γ → Λ, δ → Λ, ε → Σ.

Α3. **α)** $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \text{συν}x\,\mathrm{dx}=\text{ημ}\beta-\text{ημ}\alpha$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell,\ \ \ell\in R,$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|.$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:
$xf(x)-2f(x)=x^2-4 \Leftrightarrow (x-2)f(x)=x^2-4.$

Για $x\neq 2$ προκύπτει $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}.$

Β2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4.$

Β3. Επειδή η f είναι συνεχής το $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0=2$. Έτσι πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=f(2)\Leftrightarrow f(2)=4.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Α/Α	Ηλικίες υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i\, \nu_i$	Σχετική συχνότητα f_i %
1η κλάση	[25, 35)	100	**30**	**3.000**	**50**
2η κλάση	[35, 45)	50	**40**	**2.000**	**25**
3η κλάση	[45, 55)	40	**50**	**2.000**	**20**
4η κλάση	[55, 65)	10	**60**	**600**	**5**
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 200$		**7.600**	**100**

Γ2. Η μέση ηλικία των υπαλλήλων είναι

$$\overline{x} = \frac{3000 + 2000 + 2000 + 300}{200} = \frac{7600}{200} = 38.$$

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων με ηλικία τουλάχιστον 45 ετών είναι:

20 + 5 = 25%.

Γ4. Μετά τις μετακινήσεις των υπαλλήλων προκύπτει ο επόμενος πίνακας

Α/Α	Ηλικίες υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i\, \nu_i$	Σχετική συχνότητα f_i %
1η κλάση	[25, 35)	110	**30**	**3.300**	**50**
2η κλάση	[35, 45)	45	**40**	**1.800**	**25**
3η κλάση	[45, 55)	40	**50**	**2.000**	**20**
4η κλάση	[55, 65)	5	**60**	**300**	**5**
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 200$		**7.400**	**100**

Η νέα μέση τιμή είναι:

$$\overline{y} = \frac{110 \cdot 30 + 45 \cdot 40 + 40 \cdot 50 + 5 \cdot 60}{200} = \frac{7400}{200} = 37.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα αντίστοιχα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι:

$$f\,'(x)=\left[e^x\cdot(x-1)\right]'=\left(e^x\right)'(x-1)+e^x\,(x-1)'=e^x\cdot(x-1)+e^x=f(x)+e^x,\ x\in R.$$

Δ2. Είναι

$$f\,'(x)=e^x\,(x-1)+e^x=e^x x-e^x+e^x=x\cdot e^x,\ x\in R.$$

Είναι:

$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=0,\quad$ αφού $\quad e^x>0$ για κάθε $x\in R$.

$f\,'(x) \Leftrightarrow e^x\cdot x=0 \Leftrightarrow x>0,\quad$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in R$.

$f\,'(x) \Leftrightarrow e^x\cdot x<0 \Leftrightarrow x<0,\quad$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄	-	o	+
f	↘		↗
		τ. min f(0) = -1	

Επομένως:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,\ +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση x = 0, το $f(0)=-1$.

Σημ. Το τοπικό ελάχιστο που βρέθηκε είναι και ολικό ελάχιστο για την f.

Δ3. Μελετάμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$g(x)=f(x)+e^x=e^x(x-1)+e^x=xe^x-e^x+e^x=xe^x,\ x\in R.$$

Παρατηρούμε ότι $g(x)=f\,'(x),\ x\in R$.

Έτσι :

$g(x)=0 \Leftrightarrow e^x\cdot x=0 \Leftrightarrow x=0,$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in R$.

$g(x)>0 \Leftrightarrow e^x\cdot x=0 \Leftrightarrow x>0,\quad$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in R$.

$g(x)<0 \Leftrightarrow e^x\cdot x<0 \Leftrightarrow x<0,\quad$ αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι έχουμε ότι:
$g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [-1, 0]$ και $g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = -\int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} xe^x\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx =$$

$$= -\int_{-1}^{0} x(e^x)'\,dx + \int_{0}^{1} x(e^x)'\,dx = -\left[xe^x\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x\,dx + \left[xe^x\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} e^x\,dx =$$

$$= -\left[xe^x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x\right]_{-1}^{0} + \left[xe^x\right]_{0}^{1} - \left[e^x\right]_{0}^{1} =$$

$$= -\left[0 + e^{-1}\right] + \left[e^0 - e^{-1}\right] + \left[e^1 - 0\right] - \left[e^1 - e^0\right] =$$

$$= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 = 2 - \frac{2}{e} \quad \text{τ.μ.}$$