<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι</u>

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2015

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για μία συνεχή συνάρτηση f να γράψετε τις τρεις κατηγορίες σημείων, τα οποία είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η επικρατούσα τιμή μίας μεταβλητής είναι μοναδική.

(Μον. 2)

β) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f (δηλαδή $f\,'(x_0) = 0$). Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 όταν $f\,''(x_0) < 0$.

(Μον. 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, Τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \alpha, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

(Μον. 2)

δ) Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους Α, τότε και η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο Α και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f\,'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g\,'(x)$$

(Μον. 2)

ε) Η σχετική συχνότητα τιμής x_i μίας μεταβλητής συμβολίζεται με f_i και ισχύει $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_{a}^{\beta} \frac{1}{x}\,dx = \ldots$, με $\beta > \alpha > 0$

(Μον. 3)

β) (c)΄ = …, αν c σταθερά.

(Μον. 3)

γ) Αν η μεταβλητή x παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι: $\bar{x} = \ldots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) 50 μαθητών της Γ΄ τάξης ενός ΕΠΑ.Λ. για να γράψουν ένα διαγώνισμα, δίνονται στον παρακάτω πίνακα κατανομής:

Χρόνος σε λεπτά	**Κέντρο κλάσης κ_i**	**Συχνότητα ν_i**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[5, 15)		**20**		
[15, 25)			**34**	
[25, 35)		**12**		
[35, 45)				
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να τον συμπληρώσετε σωστά.

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου, που χρειάστηκαν οι μαθητές για να γράψουν το διαγώνισμα.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 (Μον. 7) και την τυπική απόκλιση s της μεταβλητής (Μον. 2).

Μονάδες 9

Β4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV%.

Μονάδες 4

(Δίνεται: $\sqrt{96} \approx 10$)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda}, & \text{αν } x > 2 \\ 4x + 4e^{x-2}, & \text{αν } x \le 2 \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε το:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda = 1$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Μία ομάδα περιβαλλοντολόγων εκτιμά ότι το βάρος B (B σε τόνους) ενός παγόβουνου μεταβάλλεται με τον χρόνο t (t σε έτη) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15,\ \ 0 \le t \le 10$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου.

Μονάδες 5

Δ2. Ποιά χρονική στιγμή το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι, αν $t \in [6, 9]$, τότε ισχύει:

$$B(9) \le B(t) \le B(6)$$

Μονάδες 5

Δ4. Ποιά χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος;

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (i) Τα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού της f.

(ii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f, στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Δηλαδή στα γωνιακά σημεία της f.

(iii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία υπάρχει η παράγωγος της f και είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή στα στάσιμα σημεία της f.

Α2.

α	β	γ	δ	ε
Λ	Σ	Λ	Λ	Σ

Α3. **α)** $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx = [\ln x]_\alpha^\beta = \ln\beta - \ln\alpha = \ln\frac{\beta}{\alpha}$.

β) $(c)' = 0$.

γ) $\displaystyle\overline{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_\kappa x_\kappa}{\nu}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Χρόνος σε λεπτά	**Κέντρο κλάσης** κ_i	**Συχνότητα** ν_i	**Αθροιστική Συχνότητα** N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[5, 15)	**10**	**20**	**20**	**200**
[15, 25)	**20**	**14**	**34**	**280**
[25, 35)	**30**	**12**	**46**	**360**
[35, 45)	**40**	**4**	**50**	**160**
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		**1000**

Β2. $\overline{x} = \dfrac{200+280+360+160}{50} = \dfrac{1000}{50} = 20$ λεπτά.

Β3. $s^2 = \dfrac{\nu_1(\kappa_1-\bar{x})^2+\nu_2(\kappa_2-\bar{x})^2+\nu_3(\kappa_3-\bar{x})^2+\nu_4(\kappa_4-\bar{x})^2}{50} =$

$$= \frac{20(10-20)^2+14(20-20)^2+12(30-20)^2+4(40-20)^2}{50} =$$

$$= \frac{20\cdot 100+14\cdot 0+12\cdot 100+4\cdot 400}{50} = \frac{2000+1200+1600}{50} = \frac{4800}{50} = 96.$$

$s = \sqrt{96} \approx 10.$

Β4. $\mathrm{CV} = \dfrac{s}{|\bar{x}|} \approx \dfrac{10}{20} = 0,5 = 50\%.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(4x+4e^{x-2}\right) = 8+4 = 12.$

Γ2. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-8}{\lambda x-2\lambda} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{\lambda(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+2x+4}{\lambda} = \dfrac{12}{\lambda}.$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ αν και μόνον αν $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2).$

Δηλαδή $12 = \dfrac{12}{\lambda} = 12$ ή $12 = \dfrac{12}{\lambda}$. Άρα $\lambda = 1$.

Γ4. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2\left(4x+4e^{x-2}\right)dx = 4\int_1^2 x\,dx + 4\int_1^2 e^{x-2}dx =$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 4\left[e^{x-2}\right]_1^2 = 4\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)+4\left(e^{2-2}-e^{1-2}\right) =$$

$$= 4\cdot\frac{3}{2}+4\left(1-\frac{1}{e}\right) = 6+4-\frac{4}{e} = 10-\frac{4}{e}.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$B(t) = \frac{-t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15, \quad 0 \le t \le 10$$

Δ1. Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους B του παγόβουνου είναι:

$$B'(t) = -t^2 + 4t + 12, \quad 0 \le t \le 10.$$

Δ2. Λύνουμε την εξίσωση $B'(t) = 0$ στο διάστημα $0 \le t \le 10$ και έχουμε:
$-t^2 + 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 12 = 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64,\ t_1 = \frac{4-8}{2} = -2,\ t_2 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

Από τον πίνακα μεταβολών βρίσκουμε ότι η B παρουσιάζει μέγιστο τη χρονική στιγμή t = 6 έτη.

t	0		6		10
B΄ (t)		+	0	-	
B (t)		↗		↘	

Δ3. Επειδή η B είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [6, 9] θα έχουμε:

$$6 \le t \le 9 \Rightarrow B(6) \ge B(t) \ge B(9).$$

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου δίνεται από την συνάρτηση:
$g(t) = B'(t) = -t^2 + 4t + 12$ στο διάστημα [0. 10]
Η πρώτη παράγωγος της g είναι $g'(t) = -2t + 4,\ t \in [0, 10]$.

Λύνουμε την εξίσωση $g'(t) = 0$ στο διάστημα [0, 10] και έχουμε:

$$-2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Από τον πίνακα μεταβολών της g βρίσκουμε ότι αυτή παρουσιάζει μέγιστο την χρονική στιγμή $t = 2$ έτη.

t	0		2		10
g΄ (t)		+	0	-	
g (t)		↗		↘	