

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2002

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Οι βαθμοί των 11 μαθητών μιας τάξης ενός Τ.Ε.Ε. σε ένα μάθημα είναι:

12, 12, 9, 15, 12, 16, 17, 7, 19, 18, 17

Για τα δεδομένα αυτά:

α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

ε. Να βρείτε τη διακύμανση.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln 2 .$$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(1)$.

Μονάδες 5

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 1, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

με $f(x) = \lambda x^3 - x$ όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1.$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ .

Μονάδες 10

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Ο πίνακας συχνοτήτων είναι:

x_i	v_i	$v_i x_i$
7	1	7
9	1	9
12	3	36
15	1	15
16	1	16
17	2	34
18	1	18
19	1	19
Σύνολο	11	154

β. Η μέση τιμή \bar{x} είναι $\bar{x} = \frac{154}{11} = 14$

γ. Η επικρατούσα τιμή είναι το 12 αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα: 3

δ. Θέτοντας σε αύξουσα σειρά τα δεδομένα έχουμε:
7 9 12 12 12 15 16 17 17 18 19
Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, άρα: $\delta = 15$

ε. Έχουμε:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{11} [(7-14)^2 + (9-14)^2 + 3(12-14)^2 + (15-14)^2 + (16-14)^2 + \\ &\quad + 2(17-14)^2 + (18-14)^2 + (19-14)^2] = \\ &= \frac{1}{11} (7^2 + 5^2 + 3 \cdot 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 4^2 + 5^2) = \\ &= \frac{1}{11} (49 + 25 + 12 + 1 + 4 + 18 + 16 + 25) = \frac{150}{11} \approx 13,6 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2ο

- α. Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

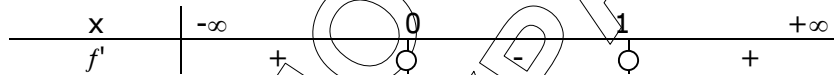
Είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln 2 \right)' = \\ &= \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' + (\ln 2)' = \\ &= \frac{1}{3}3x^2 - \frac{1}{2}2x + 0 = x^2 - x \end{aligned}$$

β. $f'(0) = 0^2 - 0 = 0$
 $f'(1) = 1^2 - 1 = 0$

γ. $f'(x) = x \cdot (x-1)$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1$
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Έτσι προκύπτει ο πίνακας προσήμων της f' :



Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\lambda x^2 - 1) = \lambda - 1$

β. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$

- γ. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, αν και μόνον αν

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

οπότε: $3 = \lambda - 1 = \lambda - 1$ ή
 $\lambda - 1 = 3$.
Άρα $\lambda = 4$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή είναι: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (\lambda x^3 - x) = 1$

οπότε $\lambda - 1 = 1$.

Άρα $\lambda = 2$.

β. Για την τιμή $\lambda = 2$ έχουμε $f(x) = 2x^3 - x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική με
 $f'(x) = (2x^3 - x)' = 6x^2 - 1$.

γ. Είναι:
$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (\lambda x^3 - x) dx = \lambda \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 x dx =$$
$$= \lambda \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \lambda \left(\frac{1}{4} - 0 \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{2}.$$

Επομένως η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f(x) dx$ για $\lambda = 2$ είναι:

$$\frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$