# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ
# ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ
# ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ
# 2005

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1ο

Ερωτήθηκαν 50 μαθητές ενός σχολείου για τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν στις διακοπές. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| **Τιμές** $x_i$ | **Συχνότητα** $\nu_i$ | **Αθροιστική Συχνότητα** | $x_i \nu_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | 11 | |
| 1 | | 25 | |
| 2 | | 42 | |
| 3 | | 47 | |
| 4 | | 50 | |
| Αθροίσματα | | | |

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

**Μονάδες 8**

β) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 5**

δ) Να βρείτε το εύρος των τιμών.

**Μονάδες 4**

## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x < -1 \\ \kappa x + \mu, & -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x + 5 + \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

όπου $\kappa, \mu$ πραγματικοί αριθμοί.

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

**Μονάδες 4**

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

**Μονάδες 4**

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

**Μονάδες 4**

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

**Μονάδες 4**

ε) Να βρείτε τα κ και μ, ώστε να υπάρχουν ταυτόχρονα τα $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

**Μονάδες 9**

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο:
$f'(x) = x^2 - 2x$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

**Μονάδες 4**

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

γ) Να βρείτε την $f''(x)$

**Μονάδες 6**

δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;

**Μονάδες 4**

ε) Αν $f(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ 4ο

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων $(t = 0)$;

**Μονάδες 5**

β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

**Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

**Μονάδες 7**

δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

**Μονάδες 5**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1ο

α)

| Τιμές $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | Αθροιστική Συχνότητα | $x_i v_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 11 | 11 | 0 |
| 1 | 14 | 25 | 14 |
| 2 | 17 | 42 | 34 |
| 3 | 5 | 47 | 15 |
| 4 | 3 | 50 | 12 |
| Αθροίσματα | 50 | | 75 |

β) Η μέση τιμή είναι: $\overline{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=0}^{4} x_i v_i = \frac{75}{50} = 1,5$.

γ) Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα της $25^{ης}$ και της $26^{ης}$ παρατήρησης.
Έτσι $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5$.

δ) Το εύρος είναι 4 – 0 = 4.

## ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to -1^-}(x+1) = 0$.

β) Είναι $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(\kappa x + \mu) = -\kappa + \mu$.

γ) Είναι $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(\kappa x + \mu) = \kappa + \mu$.

δ) Είναι $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 + 2x + 5 + \ln x) = 1 + 2 + 5 = 8$.

ε) Τα όρια $\lim_{x\to -1} f(x)$ και $\lim_{x\to 1} f(x)$ υπάρχουν αν και μόνο αν
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$, δηλαδή
$0 = -\kappa + \mu \Leftrightarrow \kappa - \mu = 0$ (1).
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ δηλαδή $\kappa + \mu = 8$ (2).
Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa - \mu = 0\\ \kappa + \mu = 8\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}2\kappa = 8\\ \kappa - \mu = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\kappa = 4\\ \mu = 4\end{array}$$

## ΘΕΜΑ 3ο

α) Στον τύπο $f'(x) = x^2 - 2x$ θέτοντας $x = 0$, $x = 2$ παίρνουμε αντίστοιχα

$f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$

$f'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$

β) $f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

| x | $-\infty$ | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | | - | | + | |
| f(x) | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

γ) $f''(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2,\ x \in \mathbb{R}$

δ) Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 0$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 2$.

ε) Η παράγουσα της $f'(x) = x^2 - 2x$ είναι $\frac{x^3}{3} - x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$ .

Οπότε $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + c$ .

Όμως $f(0) = 2005$. Άρα $\frac{0^3}{3} - 0^2 + c = 2005 \Leftrightarrow c = 2005$.

Έτσι προκύπτει $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2005,\ x \in \mathbb{R}$ .

## ΘΕΜΑ 4ο

α) Ο αριθμός των δελφινιών που υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$N(0) = 2 \cdot 0^3 - 0^2 + 5 \cdot 0 + 1000 = 1000$.

β) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών είναι:

$N'(t) = (2t^3 - t^2 + 5t + 1000)' = 6t^2 - 2t + 5$.

γ) Ο ρυθμός αύξησης των δελφινιών το δεύτερο έτος είναι:

$N'(2) = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 6 \cdot 4 - 4 + 5 = 24 - 4 + 5 = 25.$

δ) Μετά από δέκα (10) χρόνια θα υπάρχουν:

$N(10) = 2 \cdot 10^3 - 10^2 + 5 \cdot 10 + 1000 =$
$= 2 \cdot 1000 - 100 + 50 + 1000 =$
$= 2000 - 50 + 1000 = 2950$ δελφίνια.