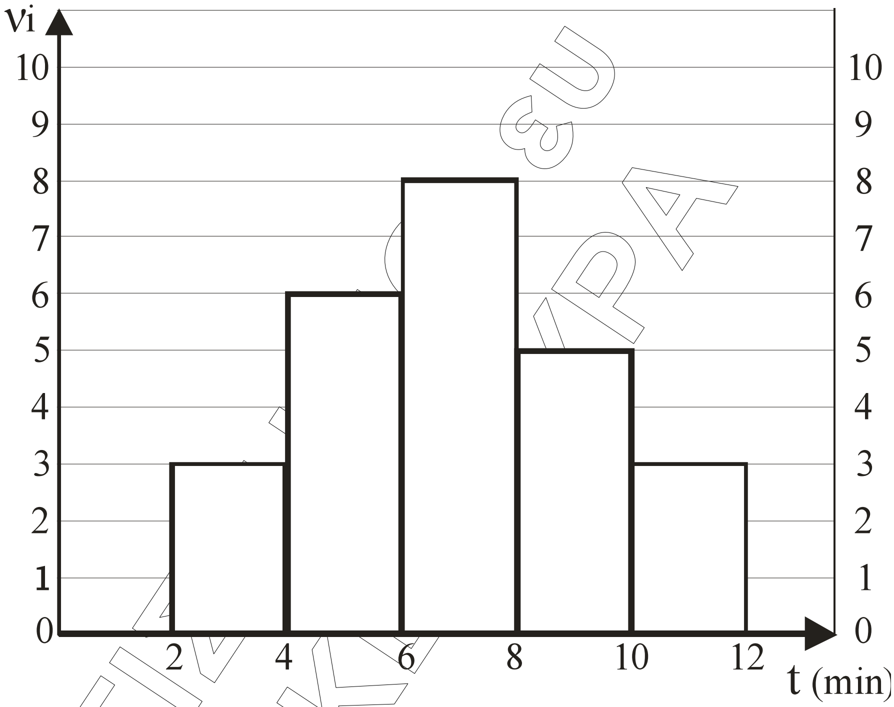
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β΄ ΚΥΚΛΟΥ ΤΕΕ
2007

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Οι χρόνοι καθυστερήσεων που παρατηρήθηκαν σε 25 δρομολόγια ενός οργανισμού σιδηροδρόμων δίνονται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων:



α. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με τη βοήθεια του παραπάνω ιστογράμματος συχνοτήτων.

Διάστημα	**Συχνότητα v_i**	**Μέσο διαστήματος K_i**	**$v_i K_i$**	**Σχετική συχνότητα f_i%**	**Σχετική αθροιστική συχνότητα %**
[2, 4)					
[4, 6)					
[6, 8)					
[8, 10)					
[10,12)					
Αθροίσματα					

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το μέσο χρόνο καθυστερήσεων των δρομολογίων.

Μονάδες 5

γ. Πόσα δρομολόγια είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά;

Μονάδες 5

δ. Ποιο είναι το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x} & \text{αν } x<0 \\ -3+\beta & \text{αν } x=0 \\ e^x-\alpha & \text{αν } x>0 \end{cases}$$ όπου α, β $\in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Μονάδες 8

δ. Για την τιμή α=4 να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β, ώστε η f να είναι συνεχής στο x=0.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2+kx+\lambda$, $k,\lambda \in \mathbb{R}$.
Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ και το σημείο Α(1,0) ανήκει στη γραφική της παράσταση,

α. να δείξετε ότι k=–2 και λ=1.

Μονάδες 12

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f΄΄ της f.

Μονάδες 5

γ. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$f(x)+f'(x) + f''(x)>0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=10\ln x-5x^2$, x>0.

α. Να βρείτε την παράγωγο f΄ της f.

Μονάδες 5

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι $f(x)\leq -5$, για κάθε x>0.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α.

Διάστημα	**Συχνότητα** ν_i	**Μέσο διαστήματος** K_i	$\nu_i K_i$	**Σχετική συχνότητα** f_i%	**Σχετική αθροιστική συχνότητα %**
[2, 4)	3	3	9	12%	12%
[4, 6)	6	5	30	24%	36%
[6, 8)	8	7	56	32%	68%
[8, 10)	5	9	45	20%	88%
[10,12)	3	11	33	12%	100%
Αθροίσματα	25		173	100%	

β. Μέσος Χρόνος Καθυστερήσεων = $\frac{9+30+56+45+33}{25} = \frac{173}{25} = 6,92$ λεπτά.

γ. Τα δρομολόγια που είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά είναι στο πλήθος:
8+5+3 = 16.

δ. Το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά είναι:
68%.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για x < 0 είναι:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x(x-1) =} = \frac{x(x-1)(x-3)}{x(x-1)} = x - 3 .$$

Άρα $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x-3) = 0 - 3 = -3$

β. Για x > 0 είναι: f (x) = e^x – α.

Άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (e^x - \alpha) = e^0 - \alpha = 1 - \alpha .$

γ. Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει όταν και μόνον:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow -3 = 1 - α \Leftrightarrow α = 4$.

Τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$.

δ. Για α = 4 υπολογίστηκε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$.

Η f θα είναι συνεχής στο x = 0 όταν και μόνον:

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -3 = -3 + β \Leftrightarrow β = 0$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + κ$.

- Αφού παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + κ = 0 \Leftrightarrow κ = -2$.
- Αφού το Α (1, 0) $\in C_f$ είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + κ \cdot 1 + λ = 0 \Leftrightarrow λ = -κ - 1 = -(-2) -1 = 1$.

  Έτσι $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $f'(x) = 2x - 2$.

β. $f''(x) = (2x - 2)' = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

γ. $f(x) + f'(x) + f''(x) = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 2 = x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f'(x) = (10\ln x - 5x^2)' = \frac{10}{x} - 10x$.

β. Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ βρίσκουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{x} - 10x = 0 \Leftrightarrow \frac{10 - 10x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{10(1-x)(1+x)}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Η τιμή $x = -1$ απορρίπτεται, αφού $x > 0$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗		↘	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ. Η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = 1$ και είναι $f(1) = -5$.

δ. Αφού η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ μέγιστο το $f(1) = -5$, προκύπτει ότι: $f(x) \leq f(1) = -5$ για κάθε $x > 0$.