

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ Α
A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

A3. 1 (γ) 2 (α)

A4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β
B1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι $f'(2) = -1$

 Έχουμε $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3x - \frac{1}{3}$ άρα $f'(x) = x^2 - 2ax + 3$

 Οπότε $f'(2) = -1 \Leftrightarrow 4 - 4a + 3 = -1 \Leftrightarrow -4a = -8 \Leftrightarrow a = 2$
B2. Η $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = x^2 - 4x + 3$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$

 Το πρόσημο της f' και τα αντίστοιχα διαστήματα μονοτονίας της f είναι στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$

Στη θέση $x = 1$ έχει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1$ και στη θέση $x = 3$ τοπικό ελάχιστο το $f(3) = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{B3. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x+1}+2) = 8 \end{aligned}$$

B4. Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 3$

$$\text{Επομένως } x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = 4 \end{cases}$$

Άρα θα βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα σημεία της $A(0, f(0))$ και $B(4, f(4))$

Για το σημείο $A(0, f(0))$ έχουμε $f(0) = -\frac{1}{3}$

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση εφαπτομένης με $\lambda = 3$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ οπότε $-\frac{1}{3} = 3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{3}$

Άρα είναι η $y = 3x - \frac{1}{3}$

Για το σημείο $B(4, f(4))$ έχουμε $f(4) = 1$

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση εφαπτομένης με $\lambda = 3$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$ οπότε $1 = 3 \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -11$

Άρα είναι η $y = 3x - 11$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων το αριστερό άκρο της 1^{ης} κλάσης είναι 5 ενώ το δεξί άκρο της 4^{ης} είναι το 29. Αν c το πλάτος των κλάσεων τότε θα είναι:

1^η κλάση $[5, 5+c)$

2^η κλάση $[5+c, 5+2c)$

3^η κλάση $[5+2c, 5+3c)$

4^η κλάση $[5+3c, 5+4c)$

Οπότε: $5+4c = 29 \Leftrightarrow 4c = 24 \Leftrightarrow c = 6$

Από την υπόθεση είναι $v_1 = 3$ και $v_2 = 5$.

Το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 3^η κλάση είναι διπλάσιο από το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 4^η κλάση οπότε

$$f_3\% = 2f_4\% \Leftrightarrow f_3 = 2f_4 \Leftrightarrow v_3 = 2v_4$$

Το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων ορθογωνίων είναι 20 οπότε: $v = 20$

$$\text{Επίσης ισχύει: } v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 20 \Leftrightarrow 3 + 5 + 2v_4 + v_4 = 20 \Leftrightarrow 3v_4 = 12 \Leftrightarrow v_4 = 4$$

Επομένως $v_3 = 8$

Γ2. Για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες έχουμε:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{3}{20} = 0,15 \text{ άρα } f_1\% = 15$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ άρα } f_2\% = 25$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{8}{20} = 0,4 \text{ άρα } f_3\% = 40$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ άρα } f_4\% = 20$$

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
[5,11)	8	3	0,15	15
[11,17)	14	5	0,25	25
[17,23)	20	8	0,40	40
[23,29)	26	4	0,20	20
Σύνολο		20	1	100

Γ3. α) Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται τουλάχιστον 11 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο είναι $f_2\% + f_3\% + f_4\% = 25 + 40 + 20 = 85$

β) Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται το πολύ 17 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο είναι $f_1\% + f_2\% = 15 + 25 = 40$

Γ4. Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{3 \cdot 8 + 5 \cdot 14 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 26}{20} = \frac{358}{20} = 17,9$$

Γ5. Το 20% των μαθητών που χρειάζονται τον περισσότερο χρόνο για να φτάσουν στο σχολείο ανήκουν στην κλάση [23,29). Το υπόλοιπο 20% θα πρέπει να ανήκει στην κλάση [17,23) στην οποία βρίσκεται το 40%. Επειδή υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα τότε το υπόλοιπο 20% θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα [20,23), οπότε οι μαθητές που χρειάζονται 20 λεπτά και πάνω για να έρθουν στο σχολείο χρησιμοποιούν κάποιο μεταφορικό μέσο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (i) Αν συμβολίσουμε με $E(x)$ την συνάρτηση των εσόδων τότε $E(x) = 50x$

(ii) Το κέρδος είναι αν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος ,δηλαδή

$$P(x) = E(x) - K(x) \Leftrightarrow P(x) = -x^2 + 80x - 100$$

Δ2. $P'(x) = -2x + 80, x \geq 0$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 40$$

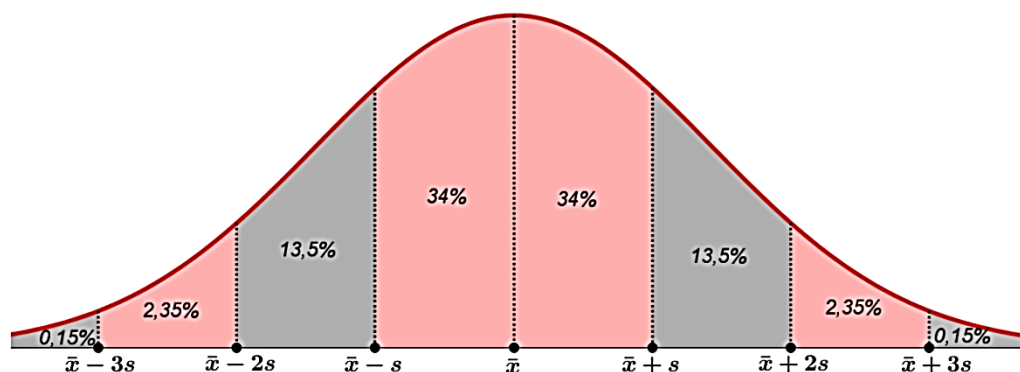
$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 80 > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 40$$

x	0	40	$+\infty$
$P'(x)$		+	-
$P(x)$		↗	↘

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι το κέρδος μεγιστοποιείται όταν η εταιρεία παράγει 40 μονάδες του προϊόντος.

Δ3. (i) Αφού το 50% των συρταριών έχουν μήκος πάνω από 40cm τότε $\bar{x} = 40$

Επίσης στην κανονική κατανομή ισχύουν τα παρακάτω



Τα 100 συρτάρια αντιστοιχούν σε $\frac{100}{4000} 100\% = 2,5\%$

Άρα το 2,5% των προϊόντων έχουν μήκος πάνω από 50 cm

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΕΛ3Γ(α)

δηλαδή $\bar{x} + 2s = 50 \Leftrightarrow s = 5$

(ii) $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{40} = 0,125$ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

(iii) Το ποσοστό των ελλειψοειδών είναι το 0,3% της παραγωγής

Επομένως $\frac{0,3}{100} \cdot 4000 = 12$ συρτάρια παράγει ελλειψοειδή η εταιρεία κάθε μέρα.

ΟΕΦΕΕ